

Compléments EM

Théorème Ostrogradski

$$\iiint_V \operatorname{div} \vec{X} dV = \oint_S \vec{X} \cdot \vec{n} \, dS$$

Théorème Stokes

$$\iint_S \operatorname{rot} \vec{X} \cdot \vec{n} \, dS = \oint_C \vec{X} \cdot d\vec{l}$$

Rappels mathématiques

- $\operatorname{div}(\operatorname{rot} \vec{X}) = 0 \quad \forall \vec{X} \quad (\operatorname{div} \vec{B} = 0 \Rightarrow \exists \vec{A} / \vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A})$
- $\operatorname{rot}(\operatorname{grad} f) = \vec{0} \quad \forall f \quad (\operatorname{rot} \vec{E} = 0 \Rightarrow \exists V / \vec{E} = -\operatorname{grad} V)$
- $\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{X} = \operatorname{grad}(\operatorname{div} \vec{X}) - \Delta \vec{X}$

Développements limités

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+2})$$

$$\cosh(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+3})$$

$$\sinh(x) = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots$$

$$\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15} x^5 + \dots$$

$$\tanh(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15} x^5 - \dots$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n} + o(x^n)$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + o(x^n)$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \dots + (-1)^n x^n + o(x^n)$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + o(x^n)$$

$$\text{Formule de Taylor-Lagrange: } f(a+h) = f(a) + h f'(a) + \dots + \frac{h^n f^{(n)}(a)}{n!} + o(h^n)$$

Formules Trigonométriques

Formules d'addition

$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$$

$$\begin{aligned}\cos(a+b) &= \cos a \cos b - \sin a \sin b \\ \cos(a-b) &= \cos a \cos b + \sin a \sin b \\ \sin(a+b) &= \cos b \sin a + \cos a \sin b \\ \sin(a-b) &= \sin a \cos b - \sin b \cos a\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \cos(2a) &= 1 - 2\sin^2 a \\ \sin(2a) &= 2\sin a \cos a\end{aligned}$$

$$\cos^2(a) = \frac{1 + \cos(2a)}{2}$$

$$\sin^2(a) = \frac{1 - \cos(2a)}{2}$$

Formules de linéarisation

$$\sin a \cos b = \frac{1}{2} [\sin(a+b) + \sin(a-b)]$$

$$\begin{aligned}\sin a \sin b &= -\frac{1}{2} [\cos(a+b) - \cos(a-b)] \\ \cos a \cos b &= \frac{1}{2} [\cos(a+b) + \cos(a-b)]\end{aligned}$$

$$\sin a + \sin b = 2 \sin\left(\frac{a+b}{2}\right) \cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

$$\cos a + \cos b = 2 \cos\left(\frac{a+b}{2}\right) \cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

$$\sin a - \sin b = 2 \cos\left(\frac{a+b}{2}\right) \sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

$$\cos a - \cos b = -2 \sin\left(\frac{a+b}{2}\right) \sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

Formules d'Euler

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

Chapitre 1 • Quelques propriétés générales de l'E.M.

Force d'interaction $\vec{F}(\vec{r}, t) = q \vec{E}(\vec{r}, t) + q \vec{v}(\vec{r}, t) \wedge \vec{B}(\vec{r}, t)$

Force de Lorentz

$$\vec{F} = q \left[\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B} \right]$$

↳ Champ électrique
↳ Champ magnétique

Equations de Maxwell (linéaires $\Rightarrow$ additivité des champs)

M. Gauss $\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$

M. Thomson $\text{div } \vec{B} = 0$

M. Faraday $\text{rot } \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

M. Ampère $\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$

ϵ_0 : permittivité du vide $\approx 8,8 \cdot 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$

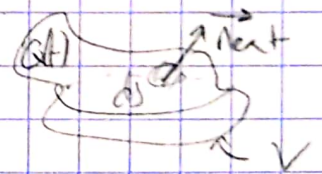
μ_0 : perméabilité du vide $\approx 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}$

avec $\vec{j} = \rho \cdot \vec{v}$ vecteur densité surfacique de courant
 ρ : densité volumique de charge surfacique

Conservation de la charge électrique $\text{div}(\mu \vec{A}) + \mu \dot{b}$

Locale: $\frac{\partial \rho}{\partial t} = - \text{div } \vec{j}$

Intégrale: $\frac{\partial Q(t)}{\partial t} = - \oint_{S \text{ portée par } V} \vec{j} \cdot \vec{n}_{\text{ext}} dS$



Ordres de grandeurs

Champ disruptif (claquage de l'air) $\sim 3 \cdot 10^6 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$

Atome d'H: énergie liasse $\sim 13 \text{ eV}$
distance noyau-e $\sim 1 \text{ Å} \sim 10^{-10} \text{ m}$ } $E_{\text{el}} \frac{10}{10^{-10}} \sim 10^{11} \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$

Transformation relativiste

$$\vec{V} = \vec{V}_{R'/R}$$

$$\vec{E}_{||} = \vec{E}'_{||} \quad \text{et} \quad \vec{B}_{||} = \vec{B}'_{||}$$

$$\vec{E}_{\perp} = \frac{\vec{E}_{\perp} + \vec{v} \wedge \vec{B}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad \text{et} \quad \vec{B}_{\perp} = \frac{\vec{B}_{\perp} - \frac{\vec{v} \wedge \vec{E}}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad \text{si } v \ll c$$

Milieux matériels

Excitation électrique $\vec{D}(\vec{E}, \text{per}) \rightarrow \text{MG} \quad \boxed{\text{div } \vec{D} = \rho_{\text{ext}}}$

Excitation magnétique $\vec{H}(\vec{B}, \text{per}, \vec{E}, \text{per}) \rightarrow \text{MA} \quad \boxed{\text{rot } \vec{H} = \vec{j}_{\text{ext}} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}}$

Si $\vec{E}$ et $\vec{B}$ pas trop forts $\Rightarrow$ milieu répond de manière linéaire

$$\Rightarrow \vec{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E} \quad \text{et} \quad \vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0 \mu_r}$$

ϵ_r : permittivité relative $\gg 1$

μ_r : perméabilité relative $\rightarrow$ $\begin{cases} < 1 \text{ diamagnétique} \\ > 1 \text{ paramagnétique} \\ \gg 1 \text{ ferromagnétique} \end{cases}$

Métaux non ferromagnétique

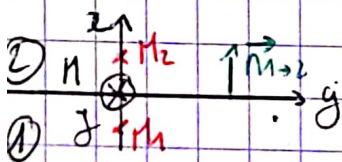
Loi d'Ohm locale $\boxed{\vec{j} = \sigma \vec{E}}$

Milieu isotrope + homogène $\Rightarrow \sigma = \text{cst} \xrightarrow{\text{MG}} \rho(t) = \rho_0 e^{-\left(\frac{\sigma}{\epsilon_0}\right)t} \xrightarrow{\sim \infty} 0$ dans métal
 $\Rightarrow$ on peut s'affranchir de $\vec{D}$ et $\vec{H}$

Conditions de passage du champ E.M.

Applications aux équations de M.

Discontinuité à l'interface



Tot N / à $\vec{n} \rightarrow z$

$$\lim_{H_1, H_2 \rightarrow 1} \int_{H_1}^{H_2} \frac{\partial F}{\partial z} dz \neq 0$$

$$\text{M.F.} \Rightarrow \boxed{E_T^2 = E_T'^2}$$

$$\text{M.T.} \Rightarrow \boxed{B_N^2 = B_N'^2}$$

$$\text{M.G. (milieu)} \quad D_N^2 - D_N'^2 = \sigma$$

$$\text{M.A. (milieu)} \quad H_T^2 - H_T'^2 = \vec{j} \wedge \vec{n}$$

vide $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}$
 métal non mag $\vec{D}_N - \vec{D}_N' = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0}$$

$$\boxed{B_T^2 - B_T'^2 = \mu_0 \vec{j} \wedge \vec{n}}$$

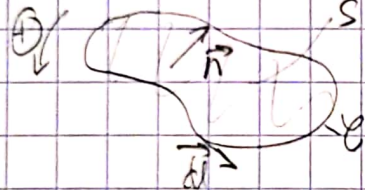
Chapitre 2: Propriété du champ $\vec{E}$ en régime statique et ou permanent

- Régime statique $\Rightarrow \vec{j} = \vec{0} \rightarrow \frac{\rho}{\epsilon} = 0 \Rightarrow \rho(\vec{r}) = 0$
- Régime permanent $\frac{\partial}{\partial t} = 0$

I. Formes locales et intégrales du champ $\vec{E}$

1. Maxwell Faraday

$$\text{rot } \vec{E} = \vec{0} \Rightarrow \vec{E} = -\text{grad } V \quad V: \text{potentiel électrique}$$



$$\Rightarrow \oint_S \vec{E} \cdot \vec{n} dS = 0 \Rightarrow \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \Rightarrow \text{Loi des mailles}$$

$$U_{AB} = - \int_A^B \text{grad } V dl = V_A - V_B \quad \text{tension = diff de potentiel}$$

2. Maxwell Gauss

$$\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \Rightarrow \iiint_V \text{div } \vec{E} dV = \iiint_V \frac{\rho}{\epsilon_0} dV = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$$

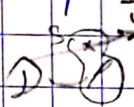
$$\Leftrightarrow \oint_S \vec{E} \cdot \vec{n} dS = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0} \quad \text{Théorème de Gauss}$$

3. Equations de Poisson et électrostatique

$$\text{rot } \vec{E} = \vec{0} + \text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \Rightarrow \text{div } (-\text{grad } V) = \frac{\rho}{\epsilon_0} \Rightarrow \Delta V = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \text{Eq. Poisson}$$

$$\text{Si pas de charges} \Rightarrow \rho = 0 \quad \Delta V = 0 \quad \text{Equation de Laplace}$$

$$\text{il y a des charges} \quad V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_D \frac{\rho(S)}{\|SM\|} dV \Rightarrow \vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_D \frac{\rho(S) \vec{\sigma}}{\|SM\|^2} dV$$



Si D: charge ponctuelle q statique en S

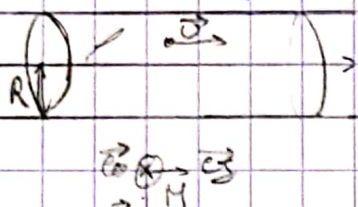
$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\|SM\|^2} \vec{\sigma} \quad \text{Loi de Coulomb}$$

$$\vec{\nabla} \frac{1}{\|SM\|} = -\frac{1}{\|SM\|^2} \vec{\sigma}$$

II - Propriétés de symétrie et d'invariance. $\rho = \text{distribution de charges}$

- Soit (P) plan de symétrie de $\rho \Rightarrow S$ plan de symétrie de $E \Rightarrow \vec{E}(M) \in S$
- Soit (P) plan d'antisymétrie de $\rho \Rightarrow S$ plan d'antisymétrie de $E \Rightarrow \vec{E}(M) \perp S$

Faisceau de protons a. cylindrique

 Symétrie: $(S) = (M, \vec{r})$ sym + $(S') = (M, \vec{r})$ antisym $\Rightarrow \vec{E}(M) = E(r)\vec{e}_r$

Invariance: translation selon $\vec{e}_z$ + rot autour $\vec{e}_z \Rightarrow \rho(r) = \rho(r) \Rightarrow \vec{E}(M) = E(r)\vec{e}_r$

Th Gauss: $r > R \Rightarrow E(r) = \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r}$ $r < R \Rightarrow E(r) = \frac{\rho r}{2\epsilon_0}$

Sphère chargée Sym $\rho(S)$ avec O et $M \Rightarrow \vec{E}(M) \propto \vec{e}_r$
Inv: toute rotation autour axe passant par $O \Rightarrow E(M) = E(r)$



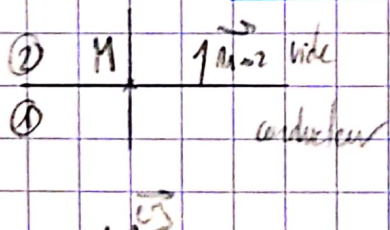
Th Gauss: sphère centre O rayon $r \Rightarrow E(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$ $E(r < R) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2}$

$\Rightarrow V(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$ et $V(R) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} = \frac{Q}{C}$
capacité sphère $C = \frac{Q}{V(R)} \Rightarrow C = \frac{4\pi\epsilon_0 R}{1}$

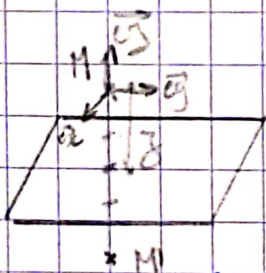
III - Champ électrique au voisinage d'un conducteur en régime statique

Conducteur: $\rho = 0$ + Statique $\vec{j} = \vec{0} \Rightarrow \vec{E}_{\text{cond}} = \vec{0}$

1. Théorème de Laplace et pression électrostatique

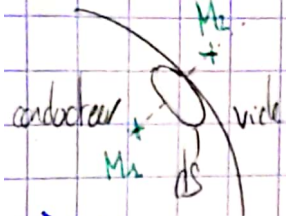
 $\vec{E}_T(M) = \vec{E}_T'(M) \Rightarrow \vec{E}_T = \vec{0}$
 $\vec{E}_N^2 - \vec{E}_N^1 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n} \Rightarrow \vec{E}_N^2 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n}$

$\vec{E}(M) = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n}$



Sym $\rho(M, \vec{e}_x, \vec{e}_y) + \rho(M, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ sym $\vec{E}(M) = E(M)\vec{e}_z$
Inv: suivant $\vec{e}_x$ et $\vec{e}_y \Rightarrow \vec{E}(M) = E(z)\vec{e}_z$

Th Gauss: cylindre axe $\vec{e}_z$, base S longueur $z \Rightarrow E(z) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$



Sphère = élément de surface $dS(A)$ + reste sphère (B)

$$\vec{F}_{B \rightarrow A}(M) = \sigma dS \vec{E}_{B \rightarrow A}(M)$$

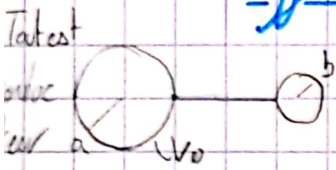
$$\vec{E}(M_1) = \vec{0} = \vec{E}_A(M_1) + \vec{E}_B(M_1) \quad (a) \quad \text{et} \quad \vec{E}(M_2) = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n}_{\text{int}} = \vec{E}_A(M_2) + \vec{E}_B(M_2) \quad (b)$$

Si on s'approche de l'interface très près $\Rightarrow$ on la considère comme infinie
On exprime $\vec{E}_B$ en M_1 et M_2 , on trouve $\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{n}_{\text{int}} \Rightarrow \vec{E}_{B \rightarrow A}(M) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{n}_{\text{int}}$

$$\Rightarrow \vec{F}_{B \rightarrow A}(M) = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} dS \vec{n}_{\text{int}} \quad \text{avec} \quad \boxed{\text{Pélectrostatique} = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0}}$$

$\hookrightarrow$ les charges s'accumulent sur la surface de la sphère

2. Effet de Pointe

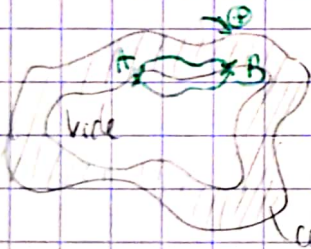


$$\left. \begin{aligned} q_A &= 4\pi\epsilon_0 a V_0 \\ q_B &= 4\pi\epsilon_0 b V_0 \end{aligned} \right\} \frac{q_A}{q_B} = \frac{a}{b} \quad Q_{\text{tot}} = q_A + q_B \quad \left(\begin{array}{l} \text{charges} \\ \text{sur les} \\ \text{surfaces} \end{array} \right)$$

$$\sigma_A = \frac{\epsilon_0 V_0}{a} \quad \text{et} \quad \sigma_B = \frac{\epsilon_0 V_0}{b} \quad \Rightarrow \quad \boxed{|\vec{E}_b| = \frac{V_0}{b} \gg |\vec{E}_a| = \frac{V_0}{a}}$$

3. Cavité - Cage de Faraday

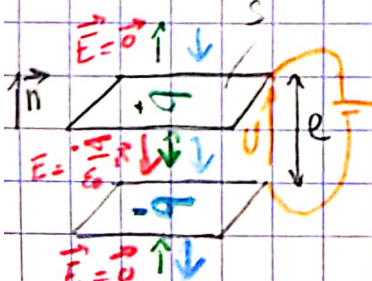
Cavité $\equiv$ vide $\Rightarrow \Delta V = 0$ + équipotentiel



$$\vec{\text{grad}} V = \vec{\text{ctes}} = \vec{0} \quad \leftarrow \begin{array}{l} + \text{absence charges} \\ \text{ds cavité} \end{array}$$

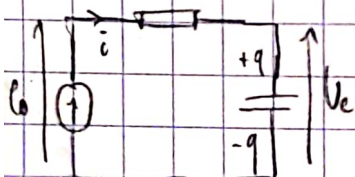
$$\text{Statique} \rightarrow \oint \vec{E}_{\text{cavité}} \cdot d\vec{l} = 0 \Rightarrow \boxed{\vec{E}_{\text{cavité}} = \vec{0}} \Rightarrow \boxed{\sigma_{\text{int}} = 0}$$

4. Densité volumique d'énergie : cas du condensateur plan.



$$|\vec{E}| = \frac{U}{e} \Rightarrow U = e \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{eq}{\epsilon_0 S} \Rightarrow \boxed{C = \frac{\epsilon_0 S}{e}}$$

$$\boxed{P_{\text{condensateur}} = U_c \cdot i = \frac{q}{c} \cdot \frac{dq}{dt}}$$



$$\boxed{E_{\text{cond}} = \int_0^{+\infty} P_{\text{cond}}(t) \cdot dt = \frac{\epsilon_0}{2} E^2 e S}$$

$\hookrightarrow$ volume condensateur

$\hookrightarrow$ densité volumique d'énergie électrostatique

Chapitre 3: Propriétés de $\vec{B}$ en régime permanent

Régime permanent $\frac{\partial}{\partial t} = 0 \Rightarrow \text{div } \vec{B} = 0$ et $\vec{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$

I. Relations locales et intégrales de $\vec{B}$

1. Maxwell - Thomson

$$\text{div } \vec{B} = 0 \Rightarrow \iiint \text{div } \vec{B} \, dV = 0 \Rightarrow \oint_S \vec{B} \cdot \vec{n} \, dS = 0 \rightarrow \vec{B} \text{ à flux conservatif} \quad \forall \text{ régime}$$

$\exists \vec{A}$ potentiel vecteur $\vec{B} = \vec{\text{rot}} \vec{A}$

$$\oint_S \vec{B} \cdot \vec{n} \, dS = \oint_S \vec{\text{rot}} \vec{A} \cdot \vec{n} \, dS = \oint_C \vec{A} \cdot d\vec{l} = 0$$

2. Maxwell - Ampère

$$\vec{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} \Rightarrow \oint_S \vec{\text{rot}} \vec{B} \cdot \vec{n} \, dS = \mu_0 \oint_S \vec{j} \cdot \vec{n} \, dS$$

Stokes $\Leftrightarrow \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \int_S \vec{j} \cdot \vec{n} \, dS$ densité surfacique de courant $\vec{j}$

Théorème d'Ampère

3. Equation de Poisson en magnétisme

$$\vec{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} \Rightarrow \vec{\text{rot}} (\vec{\text{rot}} \vec{A}) = \mu_0 \vec{j} = \text{grad}(\text{div } \vec{A}) - \Delta \vec{A}$$

On impose un choix de Jauge $\text{div } \vec{A} = 0$ Jauge de Coulomb

$$\Delta \vec{A} = -\mu_0 \vec{j} \quad \text{Eq de Poisson de sol} \quad \vec{A}(\vec{M}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_D \frac{\vec{j}(\vec{s})}{\|\vec{s} - \vec{M}\|} \, dV$$

$$\vec{B}(\vec{M}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\text{esp}} \frac{\vec{j}(\vec{s}) \wedge \vec{r}}{\|\vec{s} - \vec{M}\|^2} \, dV$$

Loi de Biot et Savart

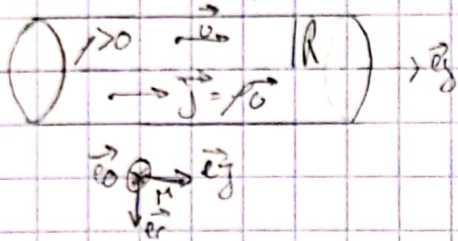
Si $\vec{D}$ filiforme et parcouru par 1 courant $i \rightarrow \vec{j}(\vec{s}) \, dV \rightarrow i \, d\vec{l}$

$$\vec{B}(\vec{M}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_C \frac{i \, d\vec{l} \wedge \vec{r}_0}{\|\vec{s} - \vec{M}\|^2}$$

II. Symétrie et invariances en magnétisme. $\mathcal{D} \equiv$ distribution de courant

- Si $(\mathcal{P})$ plan de symétrie de $\mathcal{D} \Rightarrow \vec{B}$ antisymétrique / $(\mathcal{P}) \Rightarrow$ si $M \in \mathcal{P} \Rightarrow \vec{B}(M) \perp \mathcal{P}$
- Si $(\mathcal{P})$ plan d'antisymétrie de $\mathcal{D} \Rightarrow \vec{B}$ symétrique / $(\mathcal{P}) \Rightarrow$ si $M \in \mathcal{P} \Rightarrow \vec{B}(M) \in \mathcal{P}$

Faisceaux de protons



Symétrie : $(\mathcal{P})$ avec M et axe symbo faisceau = plan de symétrie de $\mathcal{D} \Rightarrow \vec{B}(M) \perp \mathcal{P} \Rightarrow \vec{B}(M) = B(r) \vec{e}_z$

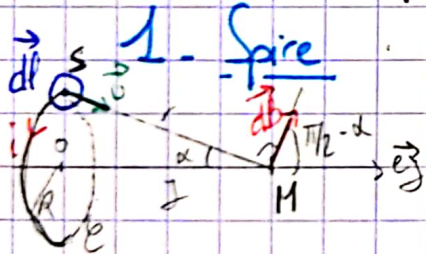
Invariance selon toute translation suivant $\vec{e}_z \Rightarrow B(r, z) = B(r)$
 rotation autour $\vec{e}_z \Rightarrow B(r, \theta) = B(r)$

Th d'Ampère sur cercle centre O et rayon r orienté selon $\vec{e}_\theta \Rightarrow \vec{n} \propto \vec{e}_z$

• si $r > R$ $\left[B(r) \cdot \frac{\mu_0 R^2 j}{2r} \right] = \frac{E(r) \mu_0}{c^2} \Rightarrow \boxed{\vec{B} = \frac{\vec{v} \wedge \vec{E}}{c^2}}$

• si $r \leq R$ $B(r) = \frac{\mu_0 j}{2} r$ ($2\pi r B = \mu_0 \pi r^2 j$)

III. Champ magnétique de la spire au solénoïde



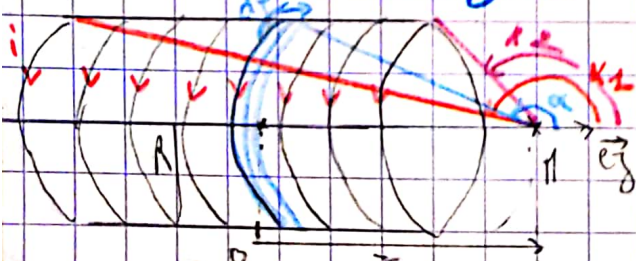
Symétrie : Tout $\mathcal{P}(\vec{e}_z, M)$: antisymétrie de $\mathcal{D} \Rightarrow \vec{B}(M) \propto \vec{e}_z$

Invariance : $B(M) = B(g) \Rightarrow \vec{B}(M) = B(g) \vec{e}_z$

Th de Biot et Savart : $\|\vec{SM}\| = r = \text{const}$, $\|\vec{dl} \wedge \vec{SM}\| = dl \cdot 1 \cdot \sin(\pi/2) = dl$
 $\sin \alpha = \frac{R}{r}$, Pythagore $\Rightarrow r^2 = R^2 + g^2$ $\vec{dl} \wedge \vec{SM} = dl \cos \alpha \vec{e}_z$
 $= dl \cos \alpha \vec{e}_z$

$\boxed{\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{\pi R^2 j}{(R^2 + g^2)^{3/2}} \vec{e}_z = \frac{\mu_0 j}{2R} \sin^3 \alpha \vec{e}_z}$

2- Solénoïde fini



On a ndg spires parcourues par $i \Rightarrow \vec{B}(M) = \frac{\mu_0 i}{2R} \sin^3 \alpha \vec{e}_z$

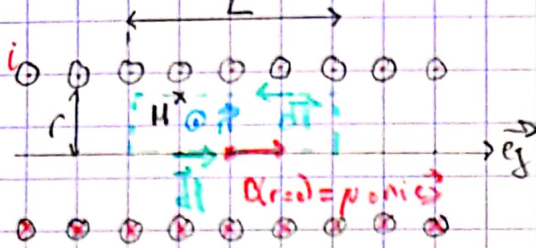
Or $dg = \frac{j^2}{R \sin^3 \alpha} dx$ ($dl \text{ (axe)} = \frac{R}{j} \rightarrow \frac{dx}{\sin \alpha} = \frac{-R dg}{j^2}$)

$\Rightarrow \boxed{\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 i}{2} \left[\cos \alpha \right]_{\alpha_1}^{\alpha_2} \vec{e}_z = \frac{\mu_0 i}{2} n (\cos \alpha_2 - \cos \alpha_1) \vec{e}_z}$

3. Solénoïde infini

BM $\alpha_1 = \pi$ et $\alpha_2 = 0 \Rightarrow$

$$\vec{B}(M) = \mu_0 n i \vec{e}_z$$



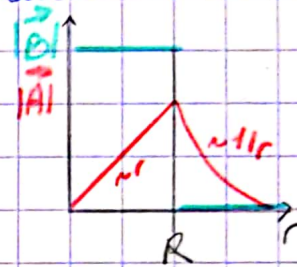
Sym (P) $\vec{L} \vec{e}_z$ avec $H = \text{sym de } D \Rightarrow \text{antisym de } B \rightarrow B(r) \vec{e}_z$

hr: translation + rotation $\vec{e}_z \rightarrow B(r) \Rightarrow \vec{B}(M) = B(r) \vec{e}_z$

Théorème d'Ampère $\rightarrow r < R : B(r) = B(r=0) = \mu_0 n i$ $r > R : B(r) = 0$

$A_{\text{int}} = \frac{r B_0}{2} \vec{e}_\theta \equiv$ potentiel vecteur qui décrit le champ $\vec{B}$ dans le solénoïde.

$\oint_C \vec{A} \cdot d\vec{l} = \iint_{S_{\text{enc}}} \vec{B} \cdot \vec{n} dS \Rightarrow 2\pi r A(r) = B_0 \pi R^2 \Rightarrow A_{\text{ext}} = \frac{B_0 R^2}{2r} \vec{e}_\theta$



IV. Potentiel vecteur et mécanique quantique

Chapitre 4: Induction électromagnétique

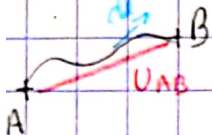
I - Position du problème

1. Rappel: transformation de $(\vec{E}, \vec{B})$ par changement de référentiel

$\mathcal{R} \equiv \text{ref labo, galiléen } (\vec{E}, \vec{B})$ $\mathcal{R}' \equiv \text{galiléen } \vec{v} = \vec{v}'/\mathcal{R} \quad (\vec{E}', \vec{B}')$

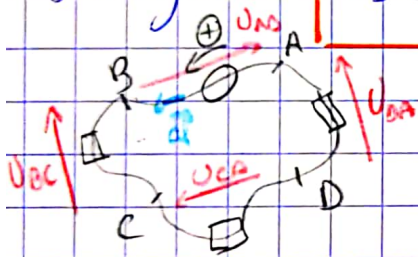
Si $v \ll c$ $\boxed{\vec{E}' = \vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}}$ et $\boxed{\vec{B}' = \vec{B} - \frac{\vec{v} \wedge \vec{E}}{c^2}}$

2 - Notion de tension et de force électromotrice



Ref où circuit fixe $U_{AB} = \int_A^B \vec{E}' \cdot d\vec{l}$

Dans ref labo $\boxed{U_{AB} = \int_A^B (\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}) \cdot d\vec{l}}$ où $\vec{v}$: vitesse locale de l'élément de longueur dl dans $\mathcal{R}$



Soit $\mathcal{C}$ circuit fermé orienté (force électromotrice)

$\boxed{e = \oint_{\mathcal{C}} (\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}) \cdot d\vec{l}}$ $\int_{em}$

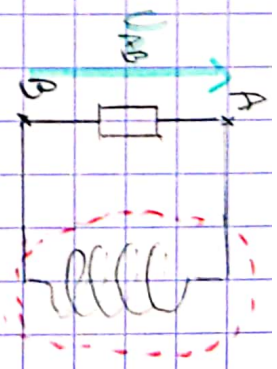
$\Leftrightarrow e = U_{AB} + U_{BC} + U_{CD} + U_{DA}$

Circuit fixe; pas de source $\rho, \vec{j}$; régime permanent ou statique $\Rightarrow e = 0 \Rightarrow i = 0$

3 - Expériences de Faraday

a) Circuit déformable: on bouge la bobine

Si on l'approche de N $\Rightarrow U_{AB} > 0 \Rightarrow i > 0 \Rightarrow e \neq 0$ Induction de Lorentz
 - l'éloigne $\Rightarrow U_{AB} < 0 \Rightarrow i < 0 \Rightarrow e \neq 0$



b) Circuit fixe: on bouge l'aimant

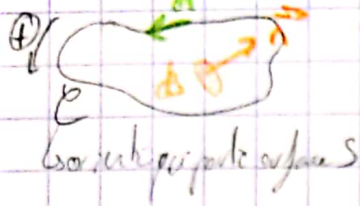
Qd on approche N $|\vec{B}(r, t)|_{bobine} \nearrow$ avec le temps
 $\hookrightarrow U_{AB} > 0 \Rightarrow i > 0 \Rightarrow e \neq 0$
 Qd on éloigne N $|\vec{B}(r, t)|_{bobine} \searrow$ avec le temps
 $\hookrightarrow U_{AB} < 0 \Rightarrow i < 0 \Rightarrow e \neq 0$

Induction de Neumann



II. Induction de Neumann - circuit fixe dans $\vec{B}(\vec{r}, t)$

1. Loi de Faraday



$$\text{M.F.} \quad \oint_{\text{circuit fixe}} (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \cdot \vec{n} dS = - \frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot \vec{n} dS$$

$$\Leftrightarrow \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot \vec{n} dS$$

Φ flux magnétique à travers S

$$\Leftrightarrow e = - \frac{d\Phi}{dt}$$

circuit fixe

$$e = - \frac{d\Phi}{dt}$$

Loi de Faraday

2. Lien entre champ électrique, magnétiques et potentiels $(\vec{A}, V)$

Loi de Lenz

$$\text{MF} + \text{MT} \Rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{E} = - \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \times \vec{A} = - \vec{\nabla} \times \left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) \Rightarrow \vec{\nabla} \times \left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = \vec{0} \Rightarrow \vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = - \vec{\nabla} \phi$$

$$\Rightarrow \vec{E}(\vec{r}, t) = - \vec{\nabla} \left(V(\vec{r}, t) - \frac{\partial \vec{A}(\vec{r}, t)}{\partial t} \right)$$

champ électromoteur de Neumann

Soient 2 couples $(\vec{A}, V)$ $(\vec{A}', V')$ qui donnent les m. champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$

$$\vec{A}'(\vec{r}, t) = \vec{A}(\vec{r}, t) + \vec{\nabla} f(\vec{r}, t)$$

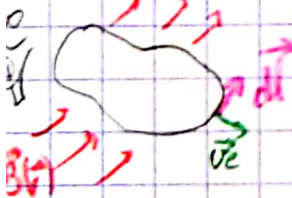
$$V'(\vec{r}, t) = V(\vec{r}, t) - \frac{\partial f(\vec{r}, t)}{\partial t}$$

3. Tension et différence de potentiel

$$U_{AB} = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} = V_A - V_B - \int_A^B \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \cdot d\vec{l}$$

$\Rightarrow$ tension $\neq$ cdp

III. Induction de Lorentz - circuit mobile ou déformable dans $\vec{B}(\vec{r})$



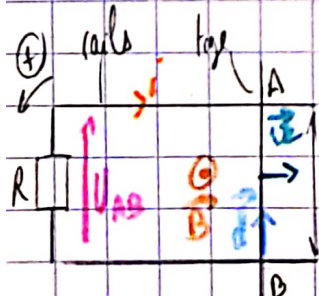
$$e = \oint (\vec{v} \wedge \vec{B}) \cdot d\vec{l} \quad (\vec{E} \text{ à circulation nulle sur } C \text{ fermé})$$

Pendant δt , l'élément de circuit se déplace de $\delta \vec{r} \Rightarrow \delta \vec{r} = \vec{v} \delta t$

$$\Rightarrow e = - \frac{1}{\delta t} \oint (\delta \vec{r} \wedge d\vec{l}) \cdot \vec{B}$$

$\delta \Phi_c$: flux coupé par la surface délimitée par le déplacement de $d\vec{l}$

$$e = - \frac{\delta \Phi_c}{\delta t}$$



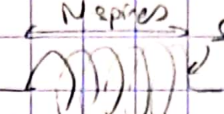
rail + tige = conducteur parfait $\Rightarrow j=0 \quad j \neq 0 \Rightarrow \vec{E} = \vec{0}$

$$e = \oint (\vec{v} \wedge \vec{B}) \cdot d\vec{l} = - v B L \quad e = U_{AB} + U_{BA} = U_{AB} = - R i \Rightarrow i = \frac{v B L}{R} > 0$$

IV - Auto induction

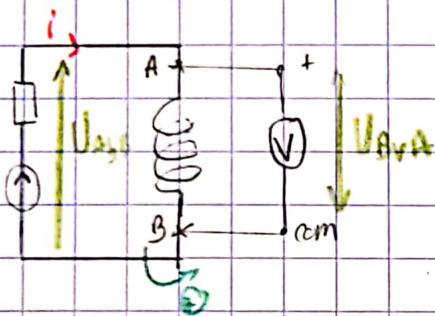
1. Inductance L

$\mathcal{E}$ provoque par un courant i orienté dans $i \Rightarrow$ création de B et $\phi = \int \vec{B} \cdot \vec{n} \, dS \propto i$

$\phi = Li$ L inductance $\sim N^2$ 
 Le champ Ns pour que $NBs \gg Bs$

2. Auto-induction

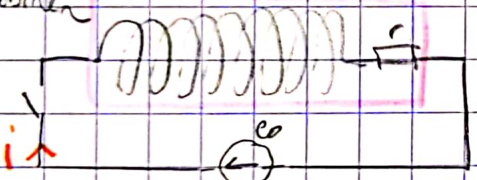
Si i varie avec $t \rightarrow B(t) \rightarrow \phi(t) \rightarrow \mathcal{E} \neq 0 = -\frac{d\phi}{dt} = -L \frac{di}{dt}$



$\mathcal{E} = U_{AB} + U_{BA} = -L \frac{di}{dt} \Rightarrow U_{AB} = L \frac{di}{dt}$

$\Rightarrow$ circuit fermé $U_{AB} = \mathcal{E}$ et $\mathcal{E} = -L \frac{di}{dt}$ mais pour avoir la validité de la loi des mailles et simplifier les eq on pose $\mathcal{E} = 0$ et $U_{BA} = L \frac{di}{dt}$

3. Energie magnétique

bobine  At $t=0$ on ferme l'interrupteur : $i=0 \rightarrow i=i_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{r}$

$\mathcal{P}(t) = U(t) i(t) = L i \frac{di}{dt} + r i^2$

$\mathcal{E}_0 = \int_{t=0}^{+\infty} \mathcal{P}(t) dt = \underbrace{\int_0^{+\infty} L i \frac{di}{dt} dt}_{\text{Energie liée à L}} + \underbrace{\int_0^{+\infty} r i^2 dt}_{\text{Effet Joule}}$

$L_0 = \frac{1}{2} L i_0^2$

Si bobine = solénoïde infini (N spires avec $\gg$ rayon des bords)

$L_B = \mu_0 \frac{N}{l} i_0 \Rightarrow \phi_0 = B N s = \frac{\mu_0 N^2}{l} \cdot i_0$
 surface perpendiculaire

$\mathcal{E}_0 = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0} \underbrace{sl}_{\text{volume solénoïde}}$
 densité volumique d'énergie magnétique

Chapitre 5 Le champ électromagnétique

I - Propagation dans le vide $\rho=0, \vec{J}=0$

$$\text{rot}(\text{MF}) \Rightarrow \underbrace{\text{grad}(\text{div})}_{\text{Ovide}} \vec{E} - \Delta \vec{E} = - \frac{\partial}{\partial t} (\underbrace{\text{rot} \vec{B}}_{\text{MF}}) = - \frac{\partial}{\partial t} \left(\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta \vec{E} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}} \quad \text{Equation de d'Alembert de } \vec{E} \text{ dans le vide}$$

La perturbation se propage à la vitesse $\frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} \approx c \Rightarrow \boxed{\mu_0 \epsilon_0 c^2 = 1}$

II - Modèle de l'onde EM plane progressive (OEMPP) dans le vide.

1. Définitions Soit $\mathcal{R}$ galiléen $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$

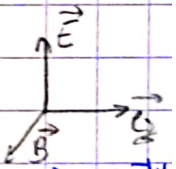
• Plane (car loin de la source ds le vide) si $\vec{E}$ et $\vec{B}$ ne dépendent pas de x et $y \rightarrow \vec{E}(z)$ et $\vec{B}(z)$

• Progressive (sans se déformer) $\rightarrow \vec{E} = \vec{E}(z-ct)$ et $\vec{B} = \vec{B}(z-ct)$

2. Structure de l'OEMPP vide ($z \uparrow$)

Avec MF $\Rightarrow E_x = -cB_y ; E_y = -cB_x ; B_z = 0$ / M.G. $E_z = 0$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{B} = \frac{\vec{e}_z \wedge \vec{E}}{c}} \Rightarrow \text{OEMPPV } (\vec{e}_z, \vec{E}, \vec{B}) \text{ forme un trièdre direct } \|\vec{B}\| = \frac{\|\vec{E}\|}{c}$$



3. OEMPP monochromatique dans le vide

$$\boxed{\vec{E}(z,t) = \vec{E}_0 \cos\left(\frac{\omega}{c}[z-ct] + \varphi\right)} = E_x^0 \cos\left(\frac{\omega}{c}z - \omega t\right) \vec{e}_x + E_y^0 \cos\left(\frac{\omega}{c}z - \omega t + \varphi\right) \vec{e}_y$$

Vecteur d'onde $\vec{k} = \frac{\omega}{c} \vec{e}_{\text{propagation}} = \frac{\omega}{c} \vec{e}_z = \frac{2\pi r}{c} \vec{e}_z = \frac{2\pi}{cT} \vec{e}_z = \frac{2\pi}{\lambda} \vec{e}_z$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega}} \quad \hookrightarrow \boxed{\vec{E}(z,t) = \vec{E}_0 \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \varphi)}$$

Ecriture en complexe $\boxed{\vec{E}(z,t) = \vec{E}_0 e^{j(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}}$

M.G. $j \vec{k} \cdot \vec{E} = 0$

M.T. $j \vec{k} \cdot \vec{B} = 0$

M.F. $j \vec{k} \wedge \vec{E} = j \omega \vec{B}$

M.A. $j \vec{k} \wedge \vec{B} = j \frac{\omega}{c^2} \vec{E}$

ici propa / $\vec{e}_z$: $\vec{E}(z,t) = \underbrace{\vec{E}_0}_{\vec{E}_0} e^{j\omega t} e^{j(kz - \omega t)}$

4- Polarisation d'une onde EMPPV monochromatique

Soit $r = \frac{E_x^0}{E_y^0}$

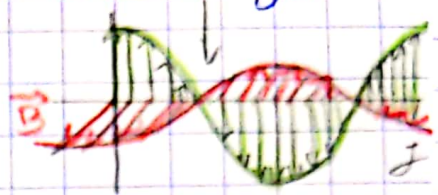
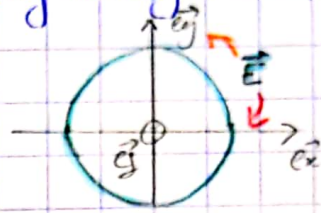
1^{er} cas : $\varphi = 0 (\pi) \rightarrow \vec{E}(x, y, z, t) = \vec{E}_0 \cos(ky - \omega t)$ Polarisation rectiligne

2^{ème} cas : $r = 1 \Rightarrow E_x^0 = E_y^0$ et $\varphi = \pm \frac{\pi}{2}$

$\vec{E}(x, y, z, t) = E^0 \cos(ky - \omega t) \vec{e}_x \mp E^0 \sin(ky - \omega t) \vec{e}_y$

$\varphi = +\frac{\pi}{2} \rightarrow$ polarisation circulaire droite

$\varphi = -\frac{\pi}{2} \rightarrow$ polarisation circulaire gauche



3^{ème} cas : $r \neq 1$ et $\varphi \neq \pm \frac{\pi}{2} \Rightarrow$ polarisation elliptique avec des demi-axes reliées selon $(\vec{e}_x, \vec{e}_y)$ gauche, droite

4^{ème} cas : $r \neq 1$ et φ quelconque $\Rightarrow$ polarisation elliptique avec demi-grand axes non colinéaires à $\vec{e}_x$ et $\vec{e}_y$

5^{ème} cas : r et φ dépendent du temps $\Rightarrow$ lumière non polarisée

III - Ondes E.M. et transport d'énergie

1. Energie EM transportée dans le vide

$\text{div}(\vec{E} \wedge \vec{B}) = \vec{B} \cdot \text{rot} \vec{E} - \vec{E} \cdot \text{rot} \vec{B}$ MF et MA $\Rightarrow = \vec{B} \cdot \left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) - \vec{E} \cdot \left(\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$

$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0} \right) = -\text{div} \left(\frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} \right)$ Eq. de conservation

forme locale $\Rightarrow \frac{\partial e}{\partial t} = -\text{div} \vec{\Pi}$

$e \equiv$ densité volumique d'énergie EM
 $\vec{\Pi} : \text{vecteur Poynting} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} [\text{W.m}^{-2}]$
 $\hookrightarrow$ densité volumique de courant μ_0 d'énergie.
 $(\vec{\Pi} \cdot \vec{n}) > 0 \Rightarrow e(t) \downarrow$

$\Rightarrow \iiint_V \frac{\partial e}{\partial t} dV = \frac{\partial E(t)}{\partial t} = -\iint_S \vec{\Pi} \cdot \vec{n}_{\text{ext}} dS$

2. Propagation de l'énergie pour une OEMPP dans le vide

$(\vec{e}_{\text{prop}}, \vec{e}_B, \vec{e}_B)$ trièdre direct et $\|\vec{B}\| = \frac{\|\vec{E}\|}{c} \Rightarrow \vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} \vec{e}_{\text{prop}} = \frac{E^2}{\mu_0 c} \vec{e}_{\text{prop}}$

$\Rightarrow \vec{\Pi} = \frac{e}{\epsilon_0 \mu_0 c} \vec{e}_{\text{prop}} = \underbrace{ec}_{\text{vitesse prop de l'énergie EM}} \vec{e}_{\text{prop}}$

IV - Champ E.M. au voisinage des sources

1. Potentiel retardé - Jauge de Lorentz

$$\vec{E} = -\text{grad} V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \xrightarrow{\text{M.G.}} \left[-\Delta V - \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \text{div} \vec{A} \right] = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (\text{I})$$

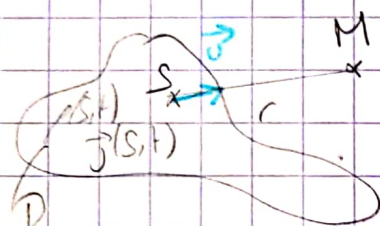
$$\vec{B} = \text{rot} \vec{A} \xrightarrow{\text{M.A.}} \left[\text{grad}(\text{div} \vec{A}) - \Delta \vec{A} \right] = \mu_0 \vec{j} - \frac{1}{c^2} \text{grad} \left(\frac{\partial V}{\partial t} \right) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} \quad (\text{II})$$

Jauge de Lorentz $\boxed{\text{div} \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial V}{\partial t} = 0}$

d'Alembertien $(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2})$

$$(\text{II}) \rightarrow \boxed{\Delta \vec{A} = \mu_0 \vec{j}}$$

$$(\text{I}) \rightarrow \boxed{\Delta V = -\frac{\rho}{\epsilon_0}}$$



$$V(M,t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_D \frac{\rho(S, t - \frac{\|\vec{SM}\|}{c})}{\|\vec{SM}\|} dV$$

$$A(M,t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_D \frac{\vec{j}(S, t - \frac{\|\vec{SM}\|}{c})}{\|\vec{SM}\|} dV$$

$\Rightarrow$ Potential retardé
temps de propagation de l'info

2. Approximation des régimes quasi-stationnaires (ARQS)

On néglige la propagation $\Rightarrow$ on a $\tau \gg T$
 temps caractéristique d'évolution de D $\rightarrow$ temps propagation
 $\Rightarrow L = cT \gg$ dimension du système

Cas : EDF 50 Hz, $T = 20 \text{ ms} \Rightarrow \lambda = 20 \cdot 10^{-3} \cdot 3 \cdot 10^8 = 6000 \text{ km} \gg$ système $\Rightarrow$ ARQS
 • GBF 1 Hz, $T = 10^{-6} \text{ s} \Rightarrow \lambda = 300 \text{ m} \gg$ longueur des câbles $\Rightarrow$ ARQS

$\Rightarrow$ Il faut monter haut en fréquence pour sortir de l'ARQS $\Rightarrow$ on néglige soit $\epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$, soit $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

3. Champ EM généré par le déplacement d'une particule chargée unique (q)

ARQS magnétique

$$|j| \gg \left| \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right|$$

$$\begin{cases} \text{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} \\ \text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \end{cases}$$

ARQS électrique
(et inductance condensateur)

$$j = 0 \text{ on néglige } \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\begin{cases} \text{rot} \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \\ \text{rot} \vec{E} = 0 \end{cases}$$