

# L8 : Phénomènes de transport

## Sommaire

---

1	Diffusion de particule .....	2
1.1	Flux et courant de particules .....	2
1.2	Bilan de particule .....	2
1.3	Loi de Fick .....	3
1.4	Equation de diffusion .....	3
2	<b>Diffusion thermique</b> .....	4
2.1	Flux et courant thermique .....	4
2.2	Équation de diffusion .....	4
2.3	Application à un barreau métallique .....	5

---

**Niveau :** L2 ou 2ème année CPGE (PC/PSI)

### Prérequis

- 1<sup>er</sup> et 2<sup>nd</sup> principe de la thermodynamique
- Electrocinétique

**INTRODUCTION** On a étudié en thermodynamique des systèmes à l'équilibre, cad à des états stationnaires et non à la transition entre les 2. Comment on arrive à cet équilibre ?

Le système macroscopique n'est pas à l'équilibre thermo (cad que les variables d'états comme T,P,  $\rho$  ne sont pas unique et constantes).

→ on peut le diviser en sous systèmes de taille méso qui sont à l'équilibre thermo = **équilibre thermo local** si  $l_p \ll d \ll L$  ( $l_p$  : libre parcours moyen,  $d$  : taille sou-syst,  $L$  : taille syst macro

#### Phénomène de transport :

- 1 grandeur physique (nbre particules, énergie, charge,..) conservée est transportée dans syst
- à cause de l'inhomogénéité d'une grandeur intensive (concentration, T) et tend à s'homogénéiser avec le temps grâce au transport d'une grandeur extensive (ex : flux énergie)
- phénomène irréversible

Différents types de transport :

- **Conduction (diffusion)** : pas de mouv macro (sujet de la leçon)
  - de particule : transport particule
  - thermique : transport énergie (prépondérant dans les solides)
  - électrique : transport charge
  - quantité de mouv
- **Convection** : mouv macro de matière - thermique (fluide) : naturelle (spontanée qd inégalité température (chaud monte)) ou forcée (circulation artificielle fluide (soufflerie))
- **Rayonnement** : transfert énergie à travers milieu transparent par intermédiaire rayonnement EM, possible dans le vide

- Migration : transport charges sous effet champ élec
- Sédimentation : transport de matière sous effet  $\vec{g}$

# 1 Diffusion de particule

Expe quali : goutte encre ou sirop dans l'eau (1 en direct et autre avant) => on voit uniformisation couleur (lent si on touille pas cad si sans convection)

## 1.1 Flux et courant de particules

Soit (S) une surface orientée.

$\delta N_S$  : nbre particules qui traversent S pdt dt

**Flux de particules** :  $\Phi_S(t) = \frac{\delta N_S}{dt} [s^{-1}]$

**Vecteur densité de courant de particules**  $\vec{j}_S(M, t)$  défini tel que  $\Phi_S(t) = \iint_S \vec{j}_S(M, t) \cdot \vec{dS}$

$[s^{-1}m^{-2}]$   
!  $\vec{dS}$  surface orienté

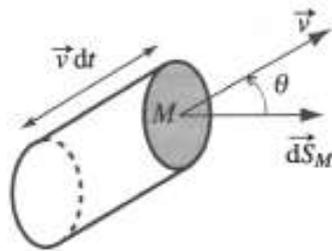


Figure 1

Volume qui contient N particules

=> **densité particulaire** : nbre de particules par unité de volume  $n(t) = \frac{\delta N_S}{d\tau} [m^{-3}]$  avec  $d\tau = dS \cdot v dt \cdot \cos\theta = \vec{v} \cdot \vec{dS} \cdot dt$

Or, nbre particules qui traversent S pendant dt :  $\delta N_S = \Phi_S(t) dt = \iint_S n(t) \vec{v} \cdot \vec{dS} \cdot dt$

=>  $\vec{j}_S(M, t) = n(M, t) \cdot \vec{v}(M, t)$

## 1.2 Bilan de particule

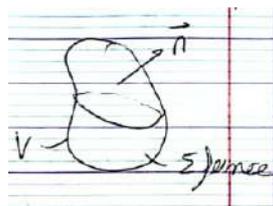


Figure 2

On fait un bilan (temporel) sur le nbre de particules en considérant qu'il se conserve et qu'il n'y a ni apparition ni disparition dans le système. =>  $N(t + dt) = \delta N_{entrant} + N(t) \Rightarrow \delta N_{entrant} =$

$$N(t + dt) - N(t)$$

$$\text{Or, } N(t) = \iiint_V n(M, t) d\tau \text{ et } N(t + dt) = \iiint_V n(M, t + dt) d\tau$$

$$\Rightarrow N(t + dt) - N(t) = \iiint_V (n(M, t + dt) - n(M, t)) d\tau = \iiint_V \frac{\partial n}{\partial t} dt d\tau \quad (1)$$

De plus (bilan spatial),

$$\delta N_{entrant} = \Phi_{entrant} \text{travers} \Sigma dt = - \oint_S \vec{j}_S \cdot \vec{dS} \cdot dt = - \iiint_V \text{div}(\vec{j}_S) d\tau dt \quad (2)$$

$$\text{D'où, } \iiint_V \left( \frac{\partial n}{\partial t} + \text{div}(\vec{j}_S) \right) d\tau = 0 \text{ vrai } \forall V$$

$$\boxed{\frac{\partial n}{\partial t} + \text{div}(\vec{j}_S) = 0} \quad (3)$$

**Equation de conservation de la matière** : 4 inconnues et 3 eq  $\Rightarrow$  problème : besoin d'une eq supplémentaire

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \text{div}(\vec{j}_S) = p \text{ avec } p : \text{nbre particules produite par temps et volume si production}$$

### 1.3 Loi de Fick

Loi phénoménologique : la diffusion tend à effacer l'inhomogénéité spatiale de concentration (des zones de forte concentration à faible, opposé à direction du  $\vec{grad}$ )

$$\boxed{\vec{j}_S(M, t) = -D \vec{grad}(n(M, t))} \quad (4)$$

avec D : coeff de diffusion particulaire [ $m^2 \cdot s^{-1}$ ] : ODG : gaz ( $10^{-6} 10^{-4}$ ), liq ( $10^{-18} 10^{-8}$ ), impuretés ds sol ( $10^{-30} 10^{-16}$ )

Limites :

- si  $\vec{grad}n$  trop fort  $\Rightarrow$  loi plus linéaire
- si  $\vec{grad}n$  varie trop vite ds temps
- si diffusivité dépend de l'espace (milieu anisotrope)

### 1.4 Equation de diffusion

On combine eq de conservation et loi de Fick avec milieu homogène (D=cst)  $\Rightarrow$  Equation de diffusion :

$$\boxed{\frac{\partial n}{\partial t} - D \Delta n = 0} \quad (5)$$

On obtient une equa diff :

- linéaire
- /t et /x,y,z  $\Rightarrow$  CI et CL  $\Rightarrow$  unicité de la solution
- $\frac{\partial}{\partial t}$  à ordre 1  $\Rightarrow$  phénomène irréversible (si  $n(M, t)$  est sol,  $n(M, -t)$  ne l'est pas)

Analyse dimensionnelle avec  $n^*$  : ODG variation de  $n$ ,  $L$  : dim caractéristique,  $\tau$  : temps caractéristique

$$\frac{n^*}{\tau} - D \frac{n^*}{l^2} = 0 \Rightarrow \boxed{L = \sqrt{D\tau}} \quad (6)$$

ex : Morceau de sucre dans 1 tasse caffè ( $L$  4cm) avec  $D$   $5.10^{-10} m^2.s^{-1}$   
 $\Rightarrow \tau = \frac{L^2}{D} \simeq 37 \text{ jours} \Rightarrow$  il faut 1 peu plus de 5 semaines pour que le café diffuse dans tout le café  
 $\Rightarrow$  Cuillère pour touiller et ajouter un transport de matière par convection

## 2 Diffusion thermique

Quand on touche une tasse remplie de thé chaud on sent la 'chaleur'  $\Rightarrow$  conduction/diffusion thermique.

**Hypothèses** : équilibre thermodynamique local : cad qu'on peut définir le système macroscopique (qui est hors éq) comme une somme de systèmes de taille mésoscopique qui eux sont à l'équilibre thermo  $\Rightarrow$  on peut définir une **température locale**  $\mathbf{T}(\mathbf{M}, \mathbf{t})$

### 2.1 Flux et courant thermique

**Flux thermique** : puissance fournie à 1 système par transfert thermique / quantité d'énergie thermique ( $\delta Q$ ) qui traverse  $S$  pendant  $dt$  :  $\boxed{\Phi_{th} = \frac{\delta Q}{dt}}$  [W]

Or, la puissance qui traverse une surface élémentaire s'écrit comme le flux du **vecteur densité de courant thermique**  $\vec{j}_Q$  [ $W.m^{-2}$ ] qui traverse la surface  $\Rightarrow \boxed{\Phi_{th} = \iint \vec{j}_Q \cdot \vec{dS}}$

!  $\vec{dS} = dS \vec{n}$  surface orientée!

Par convention  $\Phi_Q > 0$  si énergie reçue  $\Rightarrow$  flux même sens que  $\vec{n}$  et  $\vec{dS}$

(Rmq : conductivité du flux thermique surfacique à l'interface entre 2 milieux)

### 2.2 Équation de diffusion

à faire par analogie avec diffusion particulaire : juste citer les étapes du raisonnement, pas le temps de faire les démos, à faire en td

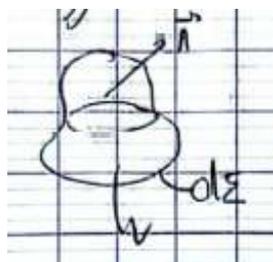


Figure 3

Système : fluide ou solide au repos

*Hypothèses* :

- Volume cst
- frontière fixe (pas de travail reçu)  $\Rightarrow \delta W = 0$

- diffusion est seul mode de transport thermique
- pas de production

Premier principe :  $dU = \delta W + \delta Q$

Or (bilan temporel)  $dU = U(t + dt) - U(t)$  avec  $U(t) = \delta mcT(t) = \iiint_V \rho T(t) d\tau$  et  $c =$  capacité calorifique massique [ $J.K^{-1}.kg^{-1}$ ]

$$dU = \iiint_V \rho c (T(t + dt) - T(t)) d\tau = \iiint_V \rho c \frac{\partial T}{\partial t} dt d\tau \quad (7)$$

De plus (bilan spatial) ,

$$\delta Q = \Phi_{entrant}.dt = - \oint_{\Sigma} \vec{j}_Q . \vec{dS} dt = - \iiint_V div(\vec{j}_Q) d\tau dt \quad (8)$$

D'où  $\forall V, \iiint_V \rho c \frac{\partial T}{\partial t} dt d\tau = - \iiint_V div(\vec{j}_Q) d\tau dt$

$$\boxed{\rho c \frac{\partial T}{\partial t} + div(\vec{j}_Q) d\tau = 0} \quad (9)$$

**Equation de conservation de l'énergie thermique** : 4 inconnues et 3 eq => problème : besoin d'une eq supplémentaire

**Loi de Fourier** (phénoménologie - analogue à loi de Fick) :  $\boxed{\vec{j}_Q = -\lambda \overrightarrow{grad}(T)}$

Le transfert thermique s'effectue spontanément des corps chauds vers les froids.

Avec  $\lambda$  : conductivité thermique [ $W.m^{-1}.K^{-1}$ ] :  $\lambda_{solidemtalique} > \lambda_{liq} > \lambda_{gaz}$

(Lien micro : conduction thermique due à agitation thermique des particules micro)

On combine l'eq de conservation et la loi de Fourier (avec  $\lambda = cst$  car milieu homogène) :

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial T}{\partial t} - \frac{\lambda}{\rho c} \Delta T = 0} \quad (10)$$

On pose la diffusivité thermique  $h = \frac{\lambda}{\rho c}$  [ $m^2.s^{-1}$ ]

On obtient une equa diff :

- linéaire
- /t et /x,y,z => CI et CL => unicité de la solution
- $\frac{\partial}{\partial t}$  à ordre 1 => phénomène irréversible (si  $n(M,t)$  est sol,  $n(M,-t)$  ne l'est pas) => créatrice d'entropie

**ODG** :  $\frac{T^*}{\tau} - h \frac{T^*}{L^2} \Rightarrow \boxed{L = \sqrt{h\tau}} \Rightarrow$  analogie diffusion moléculaire

## 2.3 Application à un barreau métallique

Expliquer expérience, prendre valeurs température et lancer la fonte du glaçon, peut-être même le faire plus tôt dès le début de la diffusion thermique ?

$$1D \Rightarrow \frac{\partial T}{\partial t} - h \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0$$

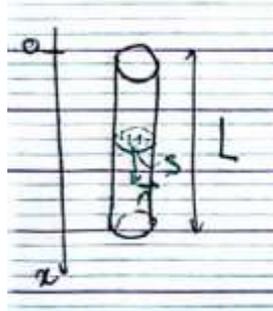


Figure 4

Or, régime stationnaire  $\Rightarrow T(x, t) = T(x) \Rightarrow \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0 \Rightarrow \frac{\partial T}{\partial x} = A \Rightarrow T(x) = Ax + B$

De plus, on a deux conditions aux limites en imposant le chauffage avec la résistance  $\Rightarrow T(x=0) = T_1$  et le bain d'eau glacée  $T(x=L) = T_2 = 0^\circ\text{C}$ .  
 $\Rightarrow B = T_1$  et  $A = \frac{T_2 - T_1}{L}$

On obtient une relation linéaire entre la température et la position qu'on retrouve bien expérimentalement :  $T(x) = \frac{T_2 - T_1}{L}x + T_1$

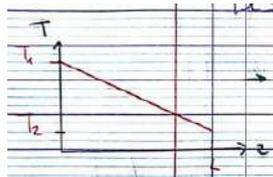


Figure 5

De plus,  $\vec{j}_Q = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \vec{e}_x = -\lambda \frac{T_2 - T_1}{L} \vec{e}_x = -\lambda A \vec{e}_x$

$$\Rightarrow T(x) = -\frac{\|\vec{j}_Q\|}{\lambda}x + T_1 \quad (11)$$

### Expe quanti : Encadre la conductivité thermique de l'aluminium

- On impose une puissance thermique avec une résistance en haut du barreau avec pertes par effet Joule :  $P = UI$ .
- En bas on impose une température de  $0^\circ\text{C}$  (un flux thermique) avec un bain d'eau glacée.
- Pour trouver  $\lambda$  il faut trouver A le coeff directeur (avec une régression linéaire) de la droite

$$\Rightarrow \lambda = -\frac{\|\vec{j}_Q\|}{A}$$

- On a des thermocouples de type K (Chrome-Nickel et Alu-Nickel) pour mesurer T à différents endroits (tous les 7 cm)
- Comment déterminer  $j_Q$

a) Majorant  $j_Q$  en considérant que tout le flux crée avec la résistance est transmis au barreau  
 $\Rightarrow P_1 = \Phi_{th} = UI = j_{Q,max}S \Rightarrow j_{Q,max} = \frac{UI}{S}$  avec S = la section du barreau =  $5\text{cm}^2 \Rightarrow \lambda_{max}$

b) **Minorant**  $j_Q$  car on a pas considéré toutes les pertes possibles par conduction, convection avec air et rayonnement.

=> on va estimer  $j_Q$  en considérant que tout le flux thermique envoyé dans le barreau permet de faire fondre une masse  $m_g$  de glace en un temps  $\Delta t$

Or,  $\Phi_{th} = j_{Q,min} S = \frac{Q}{\Delta t}$ .

Or pour le changement d'état  $Q = m_g \Delta_{s \rightarrow l} h_{eau}$  avec  $\Delta_{s \rightarrow l} h_{eau}$  l'enthalpie massique de fusion de l'eau 333.55 J/g

=>  $j_{Q,min} S = \frac{m_g \Delta_{s \rightarrow l} h_{eau}}{\Delta t}$

$$\Rightarrow \boxed{j_{Q,min} = \frac{m_g \Delta_{s \rightarrow l} h_{eau}}{S \Delta t}} \quad (12)$$

=>  $\lambda_{min}$

On a donc réussi à encadrer la conductivité thermique de l'aluminium.

Remarques :

- Si on prolonge la courbe  $T(x)=f(x)$  on remarque que en  $x=L \Rightarrow T=0^\circ C$   
 or le barreau est plongé dans l'eau glacé => Interface sol/liq => on a un gradient de température

Loi de Newton :  $\vec{j}_Q = h(T_{sol} - T_{liq}) \vec{n}$  avec  $h$  : coefficient de transfert thermique [ $W.m^{-2}.K^{-1}$ ] qui dépend des propriétés de l'écoulement dans la couche limite située entre le solide et le fluide et  $\vec{n}$  la normale dirigée vers l'extérieur de la surface solide

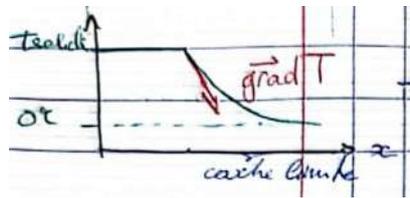


Figure 6

On a une couche limite où on a un grad de température : + grad est grand => transfert thermique + efficace => petite couche limite

- Si on trace  $temps = f(m_g)$  on obtient une droite. Si pour  $m_g = 0g$  on a bien  $temps = 0s$  => flux ambiant négligeable. Ici c'est pas le cas => flux ambiant non négligeable

**CONCLUSION** Nous avons abordé les phénomènes de transport en étudiant la diffusion de particule et thermique. => on peut également faire l'analogie avec la conduction électrique et la diffusion de quantité de mouvement (viscosité) qui seront abordées dans de prochains cours

Les équations de diffusion sont les mêmes => diffusion irréversible

Avec expériences on a vu couplage convection et diffusion => il y a une compétition entre les différents modes de transport

Nombre de Reynolds  $Re = \frac{convection}{viscosité} = \frac{\rho UL}{\eta}$  ou nombre de Péclet (cas ici)  $Pe = \frac{convection}{diffusion} = \frac{UL}{h}$

On a utilisé des lois phénoménologiques pour les vecteurs densité de courant (particulaire et thermique), mais il est possible de les obtenir avec des modèles microscopiques (Drude pour la conduction dans les métaux).

	Diffusion de particules	Diffusion thermique	Diffusion de quantité de matière	Conduction électronique
Équation de conservation locale	$\frac{\partial n}{\partial t} + \text{div} \vec{j}_n = 0$	$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} + \text{div} \vec{j}_Q = 0$	$\rho \frac{\partial v_x}{\partial t} + \text{div} \left( \frac{d\vec{F}_x}{ds} \right) = 0$	$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} \vec{j}_e = 0$
Loi de réponse linéaire	$\vec{j}_n = -D \overrightarrow{\text{grad}} n$ Loi de Fick	$\vec{j}_Q = -\kappa \overrightarrow{\text{grad}} T$ Loi de Fourier	$\frac{d\vec{F}_x}{ds} = -\eta \frac{\partial v_x}{\partial y} \vec{e}_x$ Loi de Newton	$\vec{j}_e = -\sigma \overrightarrow{\text{grad}} V$ Loi d'Ohm
Coefficient de Transport	$D$ (m <sup>2</sup> /s) Diffusivité	$\kappa$ (W/m/K) Conductivité thermique	$\eta$ (Pa.s) Viscosité dynamique	$\sigma$ (S/m) Conductivité électrique
Coefficient de diffusion	$D$ (m <sup>2</sup> /s)	$D_{\text{th}} = \kappa / \rho c$ (m <sup>2</sup> /s)	$\nu = \eta / \rho$ (m <sup>2</sup> /s)	
Équation de diffusion	$\frac{\partial n}{\partial t} = D \Delta n$	$\frac{\partial T}{\partial t} = D_{\text{th}} \Delta T$	$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \nu \Delta \vec{v}$	

Figure 7