

4: Modèle de l'écoulement parfait. ⁽¹⁾

- PRÉREQUIS:**
- Cinématique des fluides (débit, écoulements incompressibles, irrotationnels)
 - Équation de Navier-Stokes
 - Viscosité $\rightarrow \left[\frac{d\vec{v}}{dt} = \eta \Delta \vec{v} \right] = \vec{F}_{visc}(\eta) + \vec{F}_{visc}(\eta \times \eta)$
 - Nombre de Reynolds $= -\eta \frac{\partial v_x}{\partial y} \frac{d\vec{v}}{dt} + \eta \frac{\partial v_y}{\partial x} \frac{d\vec{v}}{dt}$
 - Bilan et thermodynamique des systèmes (même d'un fluide)

INTRODUCTION

Cours précédent sur dynamique des fluides : PFD à 1 devant de fluide dV en considérant fluide : - non newtonien - incompressible ($\rho \ll \rho_{eau}$)

$\Rightarrow$ Eq de Navier-Stokes

$$\rho \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} \right] = -\nabla P + \rho \vec{g} + \eta \Delta \vec{v}$$

Termes : Terme convectif, Force vol, Force, Terme diffusif
 incompressible, la première si, de premier volume de pression

$\Rightarrow$ Problème math- γ extrêmement compliqué (à résoudre); les jeux sont faits.
 $\Rightarrow$ c'est pourquoi on construit des modèles qui permettent de faire des approximations en négligeant certains termes devant d'autres.

I. Modèle de l'écoulement parfait

1. Hypothèses et domaine de validité

* Fluide parfait: viscosité et conductivité thermique strictement nulle : $\eta = 0$ et $\lambda = 0$

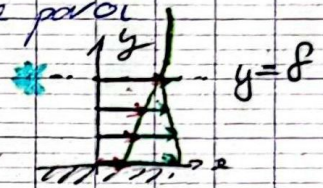
- Cl: fluide glisse contre parois mais sans le pénétrer $\vec{v} \cdot \vec{n} = \vec{v}_{tang} \cdot \vec{n}$
- Évolution temporelle car plus de causes d'irréversibilité $\frac{\partial S}{\partial t} = 0$

Mais il $\exists$ que l'hélium 4 (superfluide en dessous de 2,17K)

$\Rightarrow$ hypothèse trop restrictives

Δ Modèle de l'écoulement parfait & de proche des parois car pau

- fluide parfait proche paroi $v \neq 0$ et tangente } $\rightarrow$ profil des vitesses $\neq$
- fluide réel : on rajoute viscosité $v = 0$ } proche paroi



$\rightarrow$ Couche limite: zone où les profils de vitesse sont différents

$\rightarrow$ épaisseur de couche limite visqueuse

$$\delta = \frac{L}{\sqrt{Re}} \sim \sqrt{\frac{L}{\nu}} \sim \sqrt{\frac{L}{U}} \quad \text{toute accélération convective nulle}$$

avec L dim caractéristique de l'écoulement

$(\vec{v} \cdot \text{grad}) \vec{v} = \vec{0}$
 P dépend que de $\frac{\partial v}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r}$
 $\frac{\partial v}{\partial r} = \frac{2}{r^2} \frac{\partial v}{\partial r}$
 $\frac{\partial v}{\partial r} = \frac{2}{r^2} \frac{\partial v}{\partial r}$

$\rightarrow$ De m avec théorème Stroh $\delta \sim \sqrt{\frac{L \nu}{U}}$
 diff char $\frac{\partial v}{\partial r}$ et conv $\frac{\partial v}{\partial r}$

$\rightarrow$ Domaine de validité écoulement parfait

- $\rightarrow Re \gg 1$ (mais < 2300 sinon turbulent)
- $\rightarrow$ si on ne s'intéresse pas à la couche limite

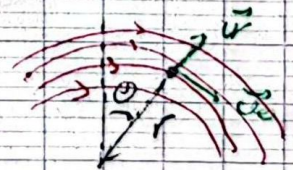
2. Equation d'Euler

Néglige viscosité $\rightarrow \boxed{\rho \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \text{grad}) \vec{v} \right] = -\text{grad} P + \rho \vec{g}}$ Eq Euler

$\rightarrow$ Effet courbure des lignes de courant

Champ de vitesse $\vec{v}(t, r) = v(t, r) \vec{e}_\theta$

$\Rightarrow \rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \rho (\vec{v} \cdot \text{grad}) \vec{v} = -\text{grad} P$ (on néglige pesanteur car l'écoulement)



Écoulement stationnaire $\Rightarrow \rho \frac{1}{r} \frac{\partial (v^2 \vec{e}_\theta)}{\partial r} = -\rho \frac{1}{r} v^2 \vec{e}_r = -\frac{\partial P}{\partial r} \vec{e}_r$

$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial P}{\partial r} = \rho \frac{v^2}{r} > 0}$ pression $\nearrow$ du rayon

La généralisable par ligne courbes $\Rightarrow P \nearrow$ du centre de courbure vers la périphérie est direct.

$$D_v = \iint_{\Sigma} \vec{v} \cdot d\vec{S}$$

$$D_m = \iint_{\Sigma} (\rho \vec{v}) \cdot d\vec{S}$$

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho dV = 0$$

④

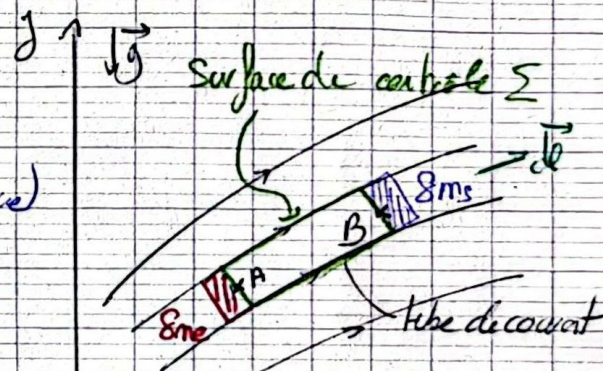
⇒ Application: Effet Coanda: Lorsqu'un solide concave est placé contre un jet de fluide, les lignes de courant s'incurvent et le jet a tendance à longer le solide.

• Portance aile d'avion: au bout $p < p_0$ } résultante force perpendiculaire vers le haut
sur $p > p_0$

• Ballon ping-pong piégé sous le jet et sa position se décale de la verticale: au dessus $p < p_0$ } résultante orientée vers le haut
au dessous $p > p_0$ } ($\vec{F}_p$: force portance $\vec{F}_t$: force traînée)

II. Théorème de Bernoulli

Hypothèses: - régime stationnaire (écoulement stationnaire)
- écoulement incompressible ($\rho \ll \rho_m$)*
- écoulement parfait ($Re \gg 1$)



Système: - à l'instant t : { fluide dans $\Sigma \oplus \Sigma_{me}$ = même qui entre pdt dt } = $\Sigma^*(t)$
- à $t+dt$: { fluide dans $\Sigma \oplus \Sigma_{ms}$ = même qui sort pdt dt } = $\Sigma^*(t+dt)$

Théorème de l'énergie mécanique: $E_m^*(j) - E_m^*(i) = \Delta E_m^* = W_{me}$

$$E_m^*(t) = E_m(t) + \mathcal{E}_{me}$$

$$E_m^*(t+dt) = E_m(t+dt) + \mathcal{E}_{ms}$$

$$\Rightarrow \Delta E_m^* = \mathcal{E}_{ms} - \mathcal{E}_{me} = W_{me}(t)$$

Or régime stationnaire $\Rightarrow E_m(t) = E_m(t+dt)$

$$\Rightarrow \mathcal{E}_{me} = \mathcal{E}_{ms} = \mathcal{E}_m \quad (\rho \text{ et } v \text{ sont constants})$$

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{E}_{me} &= \frac{1}{2} \rho_m \int_V v^2(A) + \rho_m g \int_V y \\ \mathcal{E}_{ms} &= \frac{1}{2} \rho_m \int_V v^2(B) + \rho_m g \int_V y \end{aligned} \right\} (2)$$

$$\text{Bernoulli: } p_B = p_0 = p_A = \frac{1}{2} \rho v^2$$

$$\Rightarrow \frac{p}{\rho} = \frac{p}{\rho} = \frac{v^2}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{p}{\rho} - \frac{v^2}{2} \ll 1 \Rightarrow v \ll c_m$$

Expression de l'WVC = $\int_{\Sigma} \vec{S} \cdot d\vec{l} =$ avec $\int_{\Sigma} = \int_{\Sigma_e} + \int_{\Sigma_s} + \int_{\Sigma_{out}}$ $\vec{S} \cdot d\vec{l}$

$$\begin{aligned} \vec{S} \cdot d\vec{l} &= S_e \cdot dl_e = P_A \cdot S_e \cdot dl_e = P_A \cdot S_e \\ \vec{S} \cdot d\vec{l} &= -S_s \cdot dl_s = -P_B \cdot S_s \cdot dl_s = -P_B \cdot S_s \end{aligned} \quad (3)$$

Or écoulement incompressible : $\rho_m = \rho \Rightarrow S_e = S_s$

En combinant (1), (2) et (3)

$$\frac{1}{2} \rho_m v_B^2 + \rho_m g y_B - \left(\frac{1}{2} \rho_m v_A^2 + \rho_m g y_A \right) = P_A S_e - P_B S_s$$

$$\Rightarrow \left[\frac{1}{2} \rho v_B^2 + \rho g y_B + P_B = \frac{1}{2} \rho v_A^2 + \rho g y_A + P_A \right] \quad \downarrow \frac{\rho_m}{S_e} = \rho$$

$$\Rightarrow \left[\frac{1}{2} \rho v^2 + \rho g z + P = \text{const} \right] \text{ sur 1 ligne de courant - Relation de Bernoulli}$$

Ligne de courant = 0

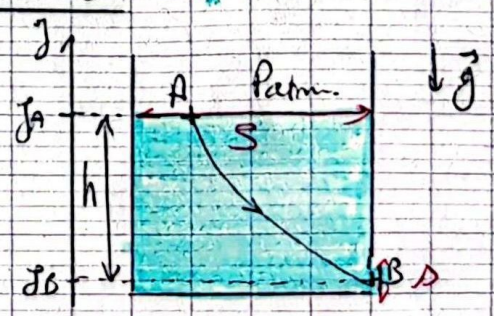
$$(\vec{F} \cdot \vec{v})_{\text{grad}} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} \text{grad}(\vec{v}^2) - \vec{v} \wedge \text{rot}(\vec{v}) \quad \left| \vec{g} = -\text{grad}(g y) \right.$$

Ligne courant $\int_{A \rightarrow B} \cdot d\vec{l}$

III - Applications.

1 - Vidange d'un réservoir : Formule de Torricelli

- Hypothèses : écoulement :
- parfait
 - incompressible
 - irrotationnel
 - stationnaire.



Bernoulli appliquée entre 1 point A à la surface libre et point B au niveau du trou de vidange : $\Rightarrow P_A + \rho \frac{v_A^2}{2} + \rho g y_A = P_B + \rho \frac{v_B^2}{2} + \rho g y_B$

Continuité de la pression à surface libre $\Rightarrow P_A = P_B = P_{atm}$

Écoulement incompressible $\Rightarrow$ conservation du débit volumique $\Rightarrow U_A S = U_B S$

$\Rightarrow U_A = U_B \frac{S}{s}$

$\Rightarrow \rho g (y_A - y_B) = \rho \frac{1}{2} (U_B^2 - U_A^2) = \rho \frac{U_B^2}{2} \left(1 - \frac{s}{S} \right)$ avec $h = y_A - y_B$

$\Rightarrow U_B = \sqrt{\frac{2gh}{1 - \frac{s}{S}}}$

Or ici $s \ll S \Rightarrow U_A \ll U_B$ (approximation régime quasi-stationnaire).

$\Rightarrow U_B = \sqrt{2gh}$ Relation de Torricelli $\rightarrow$ Évolution caractéristique d'un écoulement parfait.

Expe quant: Vérifier expérimentalement cette relation.

- $\rightarrow$ Vase de Mariotte: permet de maintenir une hauteur effective h constant
- $\rightarrow$ On relève h par rapport à quand l'eau ne s'écoule pas car on a $P = P_{atm}$
- $\rightarrow$ On attend régime permanent (pas de l'air dans le tube)
- $\rightarrow$ Calculer U_B ?

$\hookrightarrow$ Débit massique $Dm = \rho s U_B \Rightarrow U_B = \frac{Dm}{\rho s}$

$\hookrightarrow$ Or $Dm = \frac{Dm}{Dt}$ $\rightarrow$ on mesure masse d'eau qui s'écoule par dt

$\rightarrow$ On mesure $s \rightarrow$ mais ici $\neq$ précis car diamètre change etc...

$\rightarrow$ On trace $U_B^2 = f(h)$

- $\hookrightarrow$ On obtient bien une relation linéaire
- $\hookrightarrow$ On pourrait remonter à $g \rightarrow$ On a g mais $\neq$ bonne valeur
- $\hookrightarrow$ Or donner à l'origine non nulle car au premier capillaire (loi de Laplace)
- $\hookrightarrow$ Dérivée d de pente et donc de g car on ne peut pas totalement adapter $\Rightarrow$ contraction section fluide $\Rightarrow$ lignes de courant s'incurvant et champ de vitesse inhomogène.
- $\Rightarrow$ mesure du débit $\neq$ mesure vitesse locale mais = mesure vitesse moyenne.

Plot: $\rho \frac{dh}{dt} = \rho g(h_a - h_b) = \rho g h$

$U_A = \sqrt{2gh}$

+ Temps de vidange: $h \searrow$ avec le temps $U (= U_A) = - \frac{dh}{dt}$

Conservation du débit volumique $\Rightarrow U_A S = U_B S \Rightarrow - \frac{dh}{dt} S = U_B S$
 $\Rightarrow dt = \frac{-dh S}{U_B S} = - \frac{S}{S} \frac{dh}{\sqrt{2gh}}$

$\int_0^H \left[t = \frac{-S}{\sqrt{2gS}} \right] \frac{dh}{\sqrt{h}} = \frac{-S}{\sqrt{2gS}} [2\sqrt{h}]_0^H = \sqrt{\frac{2H}{g}} \frac{S}{S}$

Expe semi quant temps de "presque vidange" reservoir

2 - Effet Venturi ($p_k, h_b < h_a$?)

* Hyp: écoulement parfait, incompressible et stationnaire dans le tube

On a des tubes verticaux ouverts à l'air ambiant $\rightarrow P_i = P_{atm}$

* Bernoulli entre A et B et B et C: $\rho \frac{U_A^2}{2} + P_A = \rho \frac{U_B^2}{2} + P_B = \rho \frac{U_C^2}{2} + P_C$

$\Rightarrow P_A - P_B = \frac{\rho}{2} (U_B^2 - U_A^2)$

* Loi de l'hydrostatique des fluides entre 0 et i avec $i \in \{A, B, C\}$
 $P_i = P_{atm} + \rho g h_i \Rightarrow P_A - P_B = \rho g (h_A - h_B)$

+ Conservation du débit volumique $\Rightarrow U_A S_A = U_B S_B \Rightarrow U_A = U_B \frac{S_B}{S_A}$
 (Or $S_B < S_A \Rightarrow \frac{S_B}{S_A} < 1 \Rightarrow U_A < U_B \Rightarrow U_A - U_B < 0$)

$\Rightarrow P_A - P_B > 0 \Rightarrow P_A > P_B \Rightarrow h_A > h_B$ (≠ de hauteur des bords)

$P_A - P_B = \frac{\rho}{2} U_B^2 \left(1 - \frac{S_B^2}{S_A^2} \right) > 0 \Rightarrow$ échange maxime cinétique $\Rightarrow$ dépression au sein du fluide
 (l'écoulement ou la section)

De même on a $h_c > h_B$, mais aussi $h_c < h_a \Rightarrow$ limite de
écoulement parfait car on a de la perte de charge liée à la viscosité.

CONCLUSION

- Def de écoulement parfait et ses limites
- Hous fonctions avec obstacles (donc hors couche limite) on peut
décrire le mouvement du fluide avec eq d'Euler.
- Avec @ hypothèses $\Rightarrow$ relation Bernoulli utiles dans plusieurs applications
industrielles (vis d'organe, créu suprenier en chimie, mesure pression - vitesse)
↳ haut Re pour s'approcher viscosité ↳ Pitot
- Prochain cours : Javes capillaires.