

L27: Effet tunnel: application à la radioactivité alpha.

(12)

PREREQUIS: - Théorie ondulatoire.

- Mécanique quantique : - λ d'onde - courant de probabilité
- Ondes EM - eq Schrödinger - point de potentiel fini
- dans milieu matériel : effet de peau et onde évanescente.
- Radioactivité

INTRODUCTION

Avec l'étude du puits fini, on a vu que la particule quantique a une probabilité de présence non nulle en dehors du puits $\Rightarrow$ dans des zones où le potentiel est plus grand que son E (dans les bords du puits)

$\Rightarrow$ la fonction d'onde pénètre dans les bords du puits: que se passe-t-il si ils ont une épaisseur finie?

$\hookrightarrow$ elle les traverse et est de nouveau propagative après $\Rightarrow$ effet tunnel

On va voir que l'effet tunnel joue un rôle fondamental en physique: il permet d'expliquer certaines phénomènes physiques:

- $\rightarrow$ radioactivité alpha
- $\rightarrow$ conformation de la molécule d'ammoniac NH_3
- $\rightarrow$ dev de djs technologies comme le microscope à effet tunnel.

I. Effet tunnel (classique) "ondulatoire"

L'effet tunnel étudié dans cette leçon de mécanique quantique n'est pas en effet intrinsèquement quantique, c'est un phénomène intrinsèquement ondulatoire.

Ici on va étudier des particules quantiques qui ont des propriétés ondulatoires.

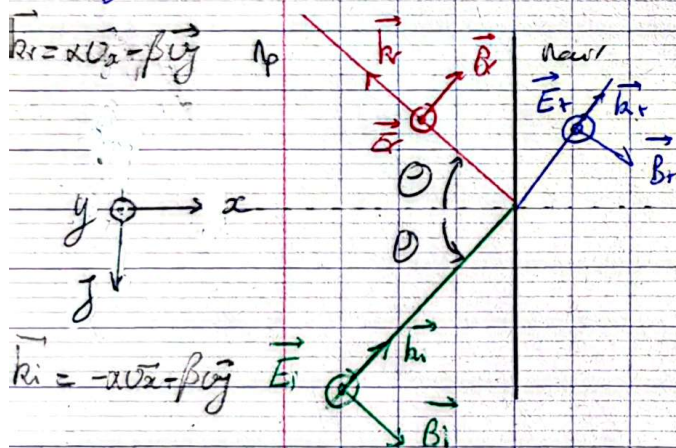
→ Capteur sensible à θ ou amplitude ?

On va vérifier expérimentalement l'effet tunnel classique.

Expé guidée Émetteur-récepteur ondes centimétriques. ^{si le bloc est arrondi: ∇} bloc plexiglas ou du bois de ^{Si elle est creuse} ∇
Quand tout est bien aligné, ça passe.
On tourne le bloc on voit l'onde $\rightarrow$ du récepteur jusqu'à 0.
 $\Rightarrow$ Plus d'onde transmise $\Rightarrow$ réflexion totale
 $\rightarrow$ Acoustique $\rightarrow$

Analogie avec optique géométrique $\bullet$, d'après loi de Snell-Descartes pour la réfraction $n_p \sin \theta_i = n_{air} \sin \theta_r$

Réflexion totale si $\sin \theta_i > \frac{n_{air}}{n_p} \Rightarrow$ Angle limite pour réflexion totale $\theta_c = \arcsin\left(\frac{1}{n_p}\right)$
 $\hookrightarrow$ dépend de λ



Or si on considère la continuité de la composante tangentielle du champ $\vec{E}$ et la continuité du champ $\vec{B}$ à l'interface

- (1) $\Rightarrow E_0 + E_{0r} = 0$ si on considère
 - (2) $\Rightarrow E_0 - E_{0r} = 0$ pas d'onde transmise
- $\hookrightarrow$ pas possible $\Rightarrow$ onde transmise

$\Rightarrow$ On peut montrer qu'il y a une onde transmise évanescente de la forme

$$\vec{E}_t(M, t) = \vec{E}_{0t} e^{j(\omega t - \vec{k}_t \cdot \vec{r})} \vec{e}_y \quad \text{avec } \vec{k}_t = -k_x \vec{e}_x - k_z \vec{e}_z \quad \text{et } \vec{r} = x \vec{e}_x - y \vec{e}_y$$

$$\vec{k}_t = -k_x \vec{e}_x - k_z \vec{e}_z \quad \text{et } \vec{r} = x \vec{e}_x - y \vec{e}_y$$

$$\Rightarrow \vec{E}_t(M, t) = \vec{E}_{0t} e^{-jk_z z} e^{j(\omega t - k_x x)} \vec{e}_y$$

$\Rightarrow$ Onde est atténuée selon z avec une distance caractéristique $\delta = \frac{1}{k_z}$

relation de passage en $z=0 \Rightarrow k_x = \frac{n_p \omega}{c} \sin \theta$

onde se propage dans air $\Rightarrow$ Eq d'A $k_i^2 - k_x^2 = -\frac{\omega^2}{c^2} \Rightarrow k_z = \frac{\omega}{c} \sqrt{n_p^2 \sin^2 \theta - 1}$

$$\Rightarrow \boxed{\lambda = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{n^2 \sin^2 \theta - 1}}} \quad \text{car } c = \lambda \cdot f = \lambda \frac{\omega}{2\pi} \Rightarrow \boxed{\frac{\omega}{\omega} = \frac{1}{2\pi}}$$

Équation: Tracer $U_{trans} = f(d)$ avec d épaisseur entre les 2 blocs.

$\Rightarrow$ 1^{er} ordre transmission $\Rightarrow d \leq \lambda$

λ mesuré par $\theta = \theta_L$.

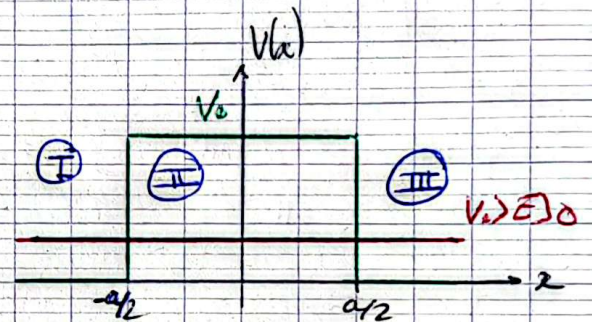
$\rightarrow$ Paire de neutrons carlo

$\Rightarrow$ Réaliser des expériences de transmission

II - Effet tunnel quantique

1. Positif du problème.

Soit un faisceau de particules quantiques incidentes d'énergie E , provenant de $x \rightarrow$ et se dirigeant vers la barrière de potentiel.



La modéliser en considérant que chaque particule quantique est soumise à un champ de force qui dérive du potentiel:

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour } x < -a/2 \text{ (I)} \\ V_0 & -a/2 < x < a/2 \text{ (II)} \\ 0 & x > a/2 \end{cases}$$

* Barrière de potentiel : $(-a/2 < x < a/2)$ largeur a et hauteur V_0 .

* En mécanique classique, pour particule classique d'énergie E

- si $E > V_0$: la particule peut passer la barrière de potentiel et aller en $x \rightarrow$
- si $E < V_0$: elle rebrousse chemin en $x = -a/2$.

* En mécanique quantique, on a vu avec proba de pénétration finie que quand $E < V_0$, $\exists$ proba $\neq 0$ de pénétration de la particule dans zone interdite.

$\Rightarrow$ Ici on s'attend à proba pénétration $\neq 0$ en sortie barrière (zone III)

$\Rightarrow$ particule quantique peut traverser la barrière (elle peut aussi être réfléchi).

Praba de reflexion et transmission ?

Cas où $E \leq V_0$: $E \gg V_0 \Rightarrow$ 3 œurni onde réfléchi et transmise

2 - Expression de la fonction d'ordre propre. (rassembler avec π_3)

Vo est indépendant du temps $\Rightarrow$ recherche une solution sous forme d'état stationnaire et résoudre eq de Schrödinger indep du temps.

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dx^2} + V(x)\psi(x) = E\psi(x)$$

$\psi(x) = 0$
 + Region I et III : $\psi''(x) + k^2 \psi(x) = 0$
 + II : $\psi''(x) - q^2 \psi(x) = 0$
 $\hookrightarrow \psi(x) = V_0$

avec $k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$, $q = \frac{\sqrt{2m(V_0 - E)}}{\hbar}$

Solutions mathématiques:

①: $\psi(x) = \underbrace{A e^{ikx}}_{\text{O.P.H. } x \rightarrow} + \underbrace{B e^{-ikx}}_{\text{O.P.H. } x \leftarrow}$

①: $\psi(x) = \underbrace{A e^{ikx}}_{\substack{\text{onde incidente} \\ \text{onde transmise}}} + \underbrace{B e^{-ikx}}_{=0}$ car on suppose 1 source émettent particules quantique au delà de $x > a/2$

② $U(x) = A_2 \cosh(qx) + B_2 \sinh(qx)$

→ intervalle symétrique autour de $x=0 \Rightarrow$ mieux d'écrire ε comme combinaison linéaire de jet pairs (ch) et impairs (sh) que avec $\exp$.

- ↳ superposition de 2 ordres évanescentes

Rang à savoir paires et $\rightarrow$ $\Rightarrow$ être sym $\Rightarrow$ p de recherche de séq sans faire les paires et impaires.

Little danger

Non-particle

OPPI normalizable $\Rightarrow$ ok equipment
credit normalizable ok

Discontinuité d'amplitude finie en $x = -a/2$ et $x = a/2$ pour le potentiel $V(x)$

Or continuité de la fonction propre

• $x = -a/2$: $A_1 e^{-ikx/2} + B_1 e^{ikx/2} = A_2 \cosh\left(\frac{qa}{2}\right) - B_2 \sinh\left(\frac{qa}{2}\right)$

• $x = a/2$: $A_3 e^{ikx/2} = A_2 \cosh\left(\frac{qa}{2}\right) + B_2 \sinh\left(\frac{qa}{2}\right)$

• continuité de la dérivée première de la fonction propre ^{car 1^{er} dérivée} 2°

• $x = -a/2$: $ik A_1 e^{-ikx/2} - ik B_1 e^{ikx/2} = -q A_2 \sinh\left(\frac{qa}{2}\right) + q B_2 \cosh\left(\frac{qa}{2}\right)$

• $x = a/2$: $ik A_3 e^{ikx/2} = q A_2 \sinh\left(\frac{qa}{2}\right) + q B_2 \cosh\left(\frac{qa}{2}\right)$

⇒ la eq pour 5 inconnues (A_1, B_1, A_2, B_2, A_3)

⇒ très possible d'exprimer les inconnues en fonction de k et q .

⇒ pas de quantification de l'énergie

La car. particule est continue.

$\frac{d\psi}{dx} + \frac{\psi}{A} = 0$

Analogie EM $\vec{j} = \rho \vec{v}$
ici $\vec{j} = \frac{1}{m} \nabla \psi = \frac{1}{m} \frac{\hbar^2}{m} \frac{\vec{p}}{\hbar} = \frac{\hbar^2}{m} \frac{\vec{p}}{\hbar}$

3. Probabilités de réflexion et transmission

On pose $\omega = \frac{E}{\hbar}$ ⇒ Fonction et vecteur densité de courant de proba.

$\omega = \frac{\hbar k^2}{2m}$
 $i(\hbar\omega - \omega t)$

• Onde incidente : $\psi_i(x,t) = A_1 e^{i(\hbar\omega - \omega t)}$

$\vec{j}_i = \frac{\hbar k}{m} |A_1|^2 = |A_1|^2 \frac{\hbar k}{m}$

• Onde réfléchie : $\psi_r(x,t) = B_1 e^{-i(\hbar\omega - \omega t)}$

$\vec{j}_r = -\frac{\hbar k}{m} |B_1|^2 = -|B_1|^2 \frac{\hbar k}{m}$

• Onde transmise : $\psi_t(x,t) = A_3 e^{i(\hbar\omega - \omega t)}$

$\vec{j}_t = \frac{\hbar k}{m} |A_3|^2 = |A_3|^2 \frac{\hbar k}{m}$

⇒ Proba de réflexion $R = \frac{\|\vec{j}_r\|}{\|\vec{j}_i\|} = \frac{|B_1|^2}{|A_1|^2}$ et transmission $T = \frac{\|\vec{j}_t\|}{\|\vec{j}_i\|} = \frac{|A_3|^2}{|A_1|^2}$

$dP = |\psi|^2 dx$

La proba présente est constante $\rho = |\psi|^2 = \frac{dP}{dx}$

Avec Σ de S eq on extrait rapport $\frac{R_1}{A_1}$ et $\frac{A_3}{A_1}$ en fct de k, q, a .

$$R = \frac{\frac{V_0^2}{4E(V_0-E)} \sinh^2(qa)}{1 + \frac{V_0^2}{4E(V_0-E)} \sinh^2(qa)}$$

$$\text{et } T = \frac{1}{1 + \frac{V_0^2}{4E(V_0-E)} \sinh^2(qa)}$$

Rmq: $T \text{ est } \neq 0 \Rightarrow$ particule quantique a toujours 1 possibilité de traverser la barrière de potentiel.

↳ Effet purement quantique (q'explicable par la mécanique classique)
= effet tunnel car ondes évanescentes dans barrière de potentiel.

* $R + T = 1$ - analogue en l'ordolabore avec conservat° $\mathcal{E}$
- ici $\Rightarrow$ conservat° proba de présence. $\Rightarrow$ particule quantique est soit réfléchi, soit transmise par barrière, q d'autre possibilité.

↳ Aproximation d'une barrière épaissie (hbf)

Si on exprime tous les coeff en fct de A_1 et qu'on fixe $A_1 = 1 \Rightarrow$ on peut déterminer fct onde propre et densité de proba présence d'animation.

Ⓘ Densité de proba $\neq$ uniforme car phénomène d'interférences de onde incidente et onde réfléchi.

Distance entre 2 maxima/minima consécutifs de $P(x) = \frac{\lambda_{00}}{2}$ $\lambda_{00} = \frac{h}{p}$

Ⓙ $P(x) \rightarrow$ à l'intérieur de la barrière de potentiel sur une distance caractéristique $\delta = \frac{1}{q} = \frac{\hbar}{\sqrt{2m(V_0-E)}}$ pour n° vraiment évanescent suivant épaisseur barrière densité proba en sortie $\neq 0$.

Ⓚ $P(x)$ uniforme est $\approx T$. (plus ou moins selon valeur de a).

Dans $\oplus$ Ph $\searrow$ sur 1 distance de pénétration δ , or situation courante

Approximation d'une barrière épaisse $a \gg \delta \rightarrow a \gg \frac{\hbar}{\sqrt{2m(V_0-E)}}$ ou $qa \gg 1$

$$T = \frac{1}{1 + \frac{V_0^2}{4E(V_0-E)} \left(\frac{e^{2qa} - e^{-2qa}}{2} \right)^2} \approx \frac{1}{1 + \frac{V_0^2}{4E(V_0-E)} e^{2qa}}$$

$$T \approx \frac{16E(V_0-E)}{V_0^2} e^{-2qa} \approx T_0 e^{-2qa} \quad \text{avec} \quad T_0 = \frac{16E(V_0-E)}{V_0^2}$$

$\Rightarrow$ décroissance exp qui caractérise T est directement liée à l'existence ondulatoire évanouissante dans barrière de potentiel. $\Rightarrow$ cf eqn $T \approx \frac{u}{u_0} = A e^{-\kappa x}$

$$\ln(T) = \ln A - \frac{a}{\delta}$$

Rmq: $T_0 = f\left(\frac{E}{V_0}\right) = \frac{16E}{V_0} \left(1 - \frac{E}{V_0}\right)$ s'annule pour $\frac{E}{V_0} = 0$ ou 1 et max pour $\frac{E}{V_0} = \frac{1}{2} \Rightarrow T_0 = 4$

La valeur moyenne sur $(0,1) = \frac{8}{3} \approx 3$

$$\delta = \frac{\hbar}{\sqrt{2m(V_0-E)}}$$

★ Valeur de T pour $E = V_0/2$

$\rightarrow$ Proba de transmission $\oplus$ importante si:

- barrière potentiel d'amplitude ou largeur faible
- masse particule faible

$\rightarrow$ effets quantiques $\oplus$ marqueurs pour particules $\oplus$ massives.

$\rightarrow$ On s'attend à ce que effet tunnel soit surtout présent à l'échelle atomique $\Rightarrow$ cas de la radioactivité α .

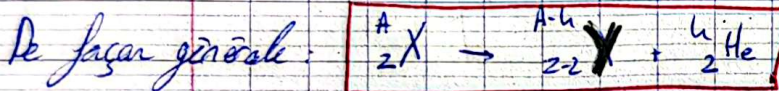
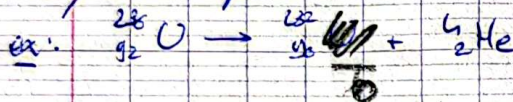
III - Application à la radioactivité alpha.

1. Approche phénoménologique.

* Radioactivité découverte par Becquerel et étudiée par les époux Curie. Prix Nobel de 1903 pour leurs travaux sur la radiation.

* Radioactivité: émission d'une particule α (noyau Helium ${}^4_2\text{He}$: 2 protons, 2 neutrons) par un noyau atomique instable.

↳ elle permet aux noyaux lourds (avec grand nbr de protons) de $\rightarrow$ répulsion électrostatique entre protons $\Rightarrow$ état $\oplus$ stable



* Geiger et Nuthel (1911) mesurent E_α d'émission des particules α et trouvent une relation entre E et $T_{1/2}$ (temps de demi-vie (10^6 à 10^{10} s) de désintégration)

↳ $\ln(T_{1/2}) = A + \frac{B}{E}$

↳ en comptant nbre événements

A et B est qui dépendent du noyau père.

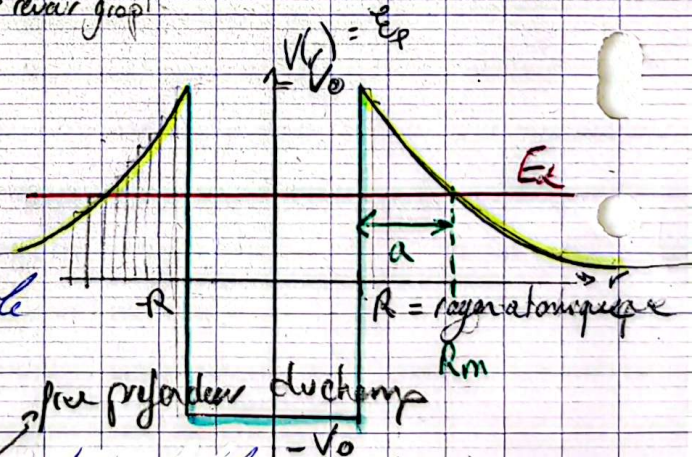
* Le taux d'émission de l'isotope considéré $\oplus$ de 10 000 de $\neq \Rightarrow$ rare en Ψ !

(prob. émission α d'un isotope) $\rightarrow$ revoir graph.

↳ Comment l'expliquer?

2. Explication quantitative.

¹⁹²⁸
Hypothèse de Gamow: la particule α préexiste dans le noyau père, mais elle y est piégée.



↳ Modèle de Gamow: qui modélise le potentiel auquel est soumis la particule.

• $|r| \leq R$: @ soumise à interaction forte (qui assure cohésion du noyau)

$\Rightarrow V(r) = \text{const} \Rightarrow$ puit de potentiel semi-fini indep de r

• $|r| > R$: interact° forte (de courte portée) $\ll$ répulsion coulombienne / électrostatique des 2-2 protons restants (car α chargée $\oplus$)

$\Rightarrow V(r) = \frac{2e(2-2)e}{4\pi\epsilon_0 R}$

Pour pouvoir sortir du puits, @ doit avoir $E > 0$: $E > 0 \Rightarrow$ noyau instable.

QDG pour $^{233}_{92}\text{U}$ $R \approx 3 \cdot 10^{-15} \text{ m} = 3 \text{ fm}$ $Z = 92$ $V(R) \approx 87 \text{ MeV} = V_0$
 $\epsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12} \text{ F/m}$ $e = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$
 Or expérimentalement, avec mesure ϵ_0 : $E_\alpha = 4,0 \text{ MeV}$

On a $E_\alpha < V(R) \Rightarrow$ comment la particule fait pour sortir du puits?
 $\Rightarrow$ grâce à effet tunnel!

$\Rightarrow$ La particule doit franchir une barrière d'épaisseur $a = R - R_m$
 Or $E_\alpha = \frac{2(Z-2)e^2}{4\pi\epsilon_0 R_m} \Rightarrow R_m \approx 6,10^{-14} \text{ m} \Rightarrow a \approx 6,5 \cdot 10^{-14} \text{ m}$

Approximation barrière épaisse $m \approx 10^{-30} \text{ kg} \Rightarrow q = \frac{\sqrt{2m(V_0 - E_\alpha)}}{\hbar} \approx 1,6 \cdot 10^{15} \text{ radm}^{-1}$
 $\Rightarrow qa \approx 106 \gg 1$ Look
 $\hookrightarrow$ Probabilité de transmission $T = T_0 e^{-2qa}$

* Décomposition de la barrière en rectangles de largeur dx

$\Rightarrow T(x+dx) \approx T(x) e^{-2q dx} \approx T(x) (1 - 2q dx)$

$\Rightarrow \frac{T(x+dx) - T(x)}{T(x)} = -2q dx \Rightarrow \frac{dT}{T} = -2q dx \Rightarrow d(\ln T) = -2q dx$

$\Rightarrow \ln T = -\frac{2}{\hbar} \int_{x_0}^{x_m} \sqrt{2m \left(\frac{K}{4\pi\epsilon_0 x} - E \right)} dx$

Changement de variable : $x_m = \frac{K}{4\pi\epsilon_0 E}$

$\ln T \approx -\frac{2}{\hbar} \int_{x_0}^{x_m} \sqrt{\frac{2m}{E} \left(\frac{x_m}{x} - 1 \right)} dx \approx -\frac{2}{\hbar} \sqrt{\frac{2m}{E}} x_m \left(\frac{\pi}{2} - 2 \sqrt{\frac{x_0}{x_m}} \right)$
 $\approx \frac{4}{\hbar} \sqrt{\frac{K 2m x_0}{4\pi\epsilon_0}} - \frac{K \sqrt{2m}}{\hbar 4\pi\epsilon_0 E} = A + \frac{B}{E}$

* $\Rightarrow \ln(T) = A + \frac{B}{\sqrt{E}} \rightarrow$ On va essayer de relier la proba de transmission et la demi-vie pour retrouver formule trouvée empiriquement

L'élément X se désintègre selon une cinétique d'ordre 1: $N(t) = N_0 e^{-t/\tau}$
 $\Rightarrow N(t_{1/2}) = N_0 e^{-t_{1/2}/\tau} = N_0/2 \Rightarrow \tau_{1/2} = \tau \ln 2 = \text{temps de demi-vie}$

Or la particule α fait des aller-retours sur une distance de $2R$ dans le noyau à vitesse v_α .

En considérant $n \equiv$ nbre moyen de rebonds sur la barrière par second $\tau = \frac{1}{f_m} = \frac{v_\alpha}{2R}$

La proba d'émission particule α par dt la chaque rebond elle a une proba T de traverser la barrière.
 $dp = n T dt = \frac{v_\alpha T}{2R} dt$

Or $\left| dp = \frac{dt}{\tau} \right|$ avec τ un temps caractéristique $\Rightarrow \tau = \frac{t_m}{T} = \frac{1}{nT}$

$\Rightarrow \tau_{1/2} = \frac{\ln 2}{nT} \Rightarrow \ln(t_{1/2}) = \ln\left(\frac{\ln 2}{n}\right) - \ln(T)$

$\ln(t_{1/2}) = A' + \frac{B'}{\sqrt{E}}$

CONCLUSION

Ex effet tunnel classique avec exp et explication effet tunnel quantique.

Effet tunnel quantique permet expliquer actives phénomènes physiques chimiques comme les catalyseurs mol amorphes NMs a des des applications technologiques à la microscopie à effet tunnel.

