

226: Cinématique relativiste. Expérience de Michelson et Morley. (1)

L2 ou L3 ?

PREREQUIS:

- Mécanique classique newtonienne
- Interféromètre de Michelson
- E et c de Maxwell

INTRODUCTION.

Jusqu'ici quand on veut repérer un objet dans l'espace, on l'étudie par rapport à un référentiel = solide (ensemble de points fixes entre eux) de référence.

Un repère (Σ d'axe à 3 dimensions avec à l'origine 1 des points fixes de ref) est choisi pour repérer l'objet dans l'espace.

Mais si on considère le mouvement de l'objet, il faut ajouter à sa description spatiale une donnée de temps.

Ainsi, ~~chaque~~ on peut décrire le mouvement de l'objet par rapport à sa position et au temps = événement.

Jusqu'à présent on a étudié des mouvements à faibles vitesses, cad $v \ll c$ = cinématique classique.

L'aspect relativiste traduit le fait que les vitesses étudiées $\sim c$.

Dans cette leçon, pas la prétention de démontrer rigoureusement les résultats de la relativité, mais de faire sentir l'esprit de l'élargissement de la théorie de la mécanique classique newtonienne à la générale.

En classique on considère le temps à une variable absolue, cad qu'il est le même dans tous les ref.

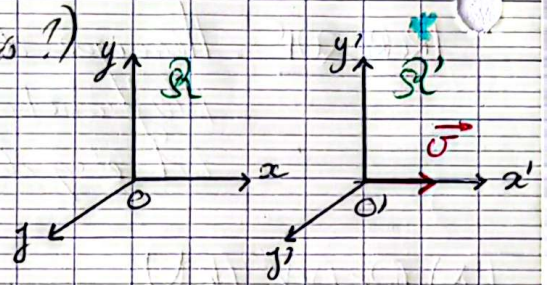
I. De la mécanique classique à la mécanique relativiste

1. La transformation de Galilée (en prérequis ?)

Considérons 2 ref $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ en transl^o rectiligne l'un par rapport à l'autre.

Les centres et axes de chaque ref coïncident à $t=0$.

Vitesse de O' dans $\mathcal{R} = \text{const} : \vec{v} = v \vec{e}_x$.



Transformation de Galilée: pour $\mathcal{R}'$ en translation rectiligne uniforme / $\mathcal{R}$ on a:

$$x' = x - vt, \quad y' = y, \quad z' = z \quad \text{et} \quad t' = t.$$

- Cette transfo s'inverse facilement en considérant de $\mathcal{R}' \rightarrow \mathcal{R}$ avec vitesse $= -v$
- Dérive / $t \Rightarrow$ loi de composition des vitesses : $\vec{v}_{\mathcal{R}}(M) = \vec{v}_{\mathcal{R}'}(M) + \vec{v}$ vitesse d'entraînement
- Cette transfo suppose $t=t'$, cohérent avec l'hypothèse qu'on a du temps, mais on va le mettre en défaut dans les parties suivantes.
- Cette loi longtemps indiscutée car ok avec observ^o du quotidien, tant que vitesses raisonnables
 - $\Rightarrow$ Dynamique classique résulte du principe de relativité de Galilée
 - $\Rightarrow$ Les eq qui décrivent la méca des Σ en jet des coordonnées et du temps doivent prouver la même forme quelque soit le ref galiléen considéré
 - $\Rightarrow$ Les lois de la dynamique sont invariantes par changement de ref galiléen.

Ex avec PFD : $\begin{cases} m\vec{a} = \vec{F} \\ m\vec{a}' = \vec{F}' \end{cases}$ Or par transfo de Galilée $\vec{a} = \vec{a}'$ (invariant par changt de ref)
 $\Rightarrow \vec{F} = \vec{F}'$

Or pour force Lorentz $\Rightarrow \vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}) = q(\vec{E}' + \vec{v} \wedge \vec{B}') = \vec{F}'$

avec $\vec{v} \wedge \vec{B} = \vec{v} \wedge \vec{B}' + \vec{v} \wedge \vec{B}$ $\Rightarrow q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B} + \vec{v} \wedge \vec{B}) = q(\vec{E}' + \vec{v} \wedge \vec{B}')$

Or eq valable pour tout mouvement de $M \Rightarrow \forall \vec{v}$ on a

$$\boxed{\begin{cases} \vec{E}' = \vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B} \\ \vec{B}' = \vec{B} \end{cases}} \quad (1)$$

2. Incompatibilité de l'ÉMI

Fin XVII^e siècle, la théorie ondulatoire de la lumière s'impose et corrobore l'hypothèse que la vitesse de la lumière est finie.

Par analogie aux ondes acoustiques, Fresnel introduit un milieu de propagation de la lumière: l'éther.

↳ ref absolu lié au mouvement de la lumière

Mais, 1864, Maxwell présente ses eq de l'ÉMI qui prédisent que les ondes ÉMI se propagent à la vitesse c , indépendamment du ref d'étude

↳ contradict° avec méca newtonienne.

De plus, ex H6 $\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$

charge invariante + transfo Galilée
conserve longueurs $\Rightarrow \rho = \rho'$
en injecte (1)

$$\text{div } \vec{E}' = \text{div } \vec{E} + \text{div}(\vec{v} \wedge \vec{B})$$

$$\text{div } \vec{E}' = \text{div } \vec{E} + \vec{v} \cdot \text{rot } \vec{B}$$

$$\boxed{\text{div } \vec{E}' = \frac{\rho}{\epsilon_0} + \vec{v} \cdot \text{rot } \vec{B} \neq \frac{\rho'}{\epsilon_0}}$$

$\Rightarrow$ Eq non invariante par transfo Galilée
↳ contradict° méca newtonienne

$\Rightarrow$ Contradiction entre théorie de Maxwell et méca newtonienne

$\Rightarrow$ ou des 2 doit être corrigée:

* si méca vraie $\Rightarrow \exists$ un référentiel absolu dans lequel les lois ÉMI sont valides (il faut corriger eq Maxwell): l'éther.
La lumière se déplacerait à c dans l'éther.

* si théorie Maxwell est vraie $\Rightarrow c$ est indépendante du ref $\Rightarrow$ il faut revoir méca newtonienne.

3. Expérience de Michelson et Morley

Fin du XIX, on cherche à mesurer la vitesse de la lumière dans $\neq$ situations vis-à-vis de l'éther pour tester la validité des 2 théories.

$$V \equiv \text{vitesse Terre sur son orbite} = \frac{2\pi R_s}{T_{\text{an}}}$$

On suppose que l'éther existe, la Terre (avec le Michelson) se déplace dans l'éther autour du Soleil à la vitesse $V = 30 \text{ km/s} \Rightarrow$ ça revient au m de considérer la Terre immobile dans un courant d'éther (c'est un bateau à l'eau dans un fleuve!)

Michelson conceit un interféromètre (qui peut maintenant se voir) constitué de 2 bras orthogonaux le long desquels les ondes lumineuses se propagent avant d'interférer en sortie. L'intensité de sortie dépend du déphasage acquis pendant le parcours des 2 bras.

On règle l'interféromètre de sorte que la distance entre la séparatrice et les 2 miroirs soit la même D .

Quelle diff de marche δ peut-on attendre lorsque l'interféromètre se déplace dans l'éther?

Plaçons l'interféromètre avec 1 de ses bras dans le sens du mouvement de la Terre autour du Soleil, c'est dans le sens de $\vec{V}$ évalué dans ref lié à l'éther où la vitesse de la lumière est c . *

$$\delta = (A_1 A_2) - (A_1 A_2) \quad \pm \text{ de chemin optique entre les 2 rayons lumineux}$$

- aller-retour dans direct° courant éther
- ————— au courant

$$n = n_{\text{air}} \Rightarrow (A_1 A_2) = A_1 A_2$$

On envoie faisceau monochromatique

* Bras orthogonal à $\vec{V}$: $A_1 A_2 = A_1 B + B A_2$

Or avec Pythagore $A_1 B^2 = D^2 + (VT)^2$ avec $T = \frac{A_1 B}{c}$ le temps de vol

$$\Rightarrow A_1 B^2 = \frac{D^2}{1 - \frac{V^2}{c^2}}, \text{ de plus } A_1 B = B A_2$$

$$\Rightarrow \boxed{A_1 B A_2 = \frac{2D}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}} \approx \underset{\text{ou } 1}{2D \left(1 + \frac{1}{2} \frac{V^2}{c^2}\right)}$$

* Bras collinéaire à $\vec{v}$ $A_1 A_2 = A_1 C + C A_2 = c T_2$

avec le temps de vol $T_2 = \frac{D}{c+V} + \frac{D}{c-V} = \frac{2D}{c} \times \frac{1}{1 - \frac{V^2}{c^2}}$

$$\Rightarrow \boxed{A_1 C A_2 = 2D \cdot \frac{1}{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \approx 2D \left(1 + \frac{V^2}{c^2} \right)$$

$$\Rightarrow \boxed{S = 2D \left[1 + \frac{V^2}{c^2} - 1 - \frac{V^2}{2c^2} \right]} = 2D \times \frac{V^2}{2c^2} = D \frac{V^2}{c^2}$$

$\Rightarrow$ déphasage $\phi = \frac{2\pi}{\lambda} S$

et ordre d'interférence $p = \frac{S}{\lambda}$ si $\lambda = 500 \text{ nm}$ $\Rightarrow p \approx 0,2$ franges
 $D = 10 \text{ m}$ $\Rightarrow$ observable

Mais, appareil ϕ parfait $\Rightarrow$ on sait pas si S mesuré ~~correct~~ est associé au phénomène
 $\Rightarrow$ on tourne le Michelson de 90° (l'autre bras est alors le sens du mouvement de l'éther) $\Rightarrow$ on a 2 situation équivalentes et la différence de $S = \Delta S$ correspondra au phénomène à mettre en évidence

(On est sensé voir si les franges se modifient $\Rightarrow$ varieté d'intensité car $E = E_0(1 + \cos \Delta\phi)$)

Dans ce cas $S' = -D \frac{V^2}{c^2}$

$$\Rightarrow \Delta S = S - S' = 2D \frac{V^2}{c^2} \Rightarrow \Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda} 2D \frac{V^2}{c^2} \Rightarrow \text{varieté d'intensité}$$

Cela correspond à un décalage des franges de $\Delta p = \frac{\Delta S}{\lambda} = \frac{2DV^2}{\lambda c^2}$

QD6: $\Delta p = 0,4$ interférences, c'est mesurable, on devrait voir la variation d'intensité.

Mais ϕ de variation d'intensité observé

ϕ interférences mesurées m avec l'amélioration de la précision des mesures.

$\Rightarrow$ Transp Galilée mise en défaut $\Rightarrow$ il faut revoir mica newtonienne dans les domaines de vitesse où elle est mise en défaut.

4. Postulats d'Einstein 1905

Expe H&M échoue à mettre en évidence le mouvement de la Terre (terre $\equiv$ support mouvement lumière) $\Rightarrow$ 2 possibilités:

- éther fixe / Terre
- concept d'éther $\hat{=}$ ref absolu n'existe pas
 $\rightarrow$ postulats d'Einstein

$\Rightarrow$ On a vu les limites de la théorie newtonienne $\Rightarrow$ postulats d'Einstein
 $\Rightarrow$ que se passe-t-il avec cette nouvelle théorie si on change de ref?

II - Changement de référentiel en relativité

1. Relativité du temps

Événement: phénomène localisé dans l'espace et le temps. Son étendue spatiale est ponctuelle et sa durée instantanée.

Il est repéré, dans un ref R donné, par ses coordonnées spatiales et sa coordonnée temporelle: quadruplet (ct, x, y, z)

On prend un horloge à photon unique, composée de 2 miroirs distants de d entre lesquels oscille un photon. (on suppose d le m dans les 2 ref)

- Dans S (ref labo) elle est en mouvement rectiligne uniforme à la vitesse V .
- Dans S' = ref de l'horloge elle est immobile.

D'après 2nd postulat, le photon voyage à la vitesse c $\forall$ ref.

On considère la durée entre les 2 événements:

- le photon quitte le miroir A
- le photon revient au miroir A.

* Dans R' : le photon fait un aller-retour entre les miroirs p^{ot} une durée $\Delta t'$

$$\Delta t' = \frac{2d}{c}$$

* Dans R : distance parcourue par photon @ grande $\equiv D \Rightarrow \Delta t = D/c$
avec Pythagore $(\frac{D}{c})^2 = d^2 + (\frac{v\Delta t}{c})^2 \Rightarrow \Delta t = \frac{c}{c^2} \sqrt{d^2 + (v\Delta t)^2}$

$$\Rightarrow \Delta t^2 = \frac{1}{c^2} (d^2 + (v\Delta t)^2) \Rightarrow \Delta t^2 (1 - \frac{v^2}{c^2}) = \frac{1}{c^2} d^2$$

$$\Rightarrow \Delta t = \frac{(\frac{cd}{c})}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \Rightarrow \Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \Rightarrow \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

* La durée entre les 2 événements est différente selon le ref

* Durée des ref en mouvement > à elle dans ref où horloge est immobile (au repos)
 $\Delta t > \Delta t'$ $\hookrightarrow \equiv$ ref propre
 $\hookrightarrow$ dilatation des durées (cf @ lon)

* Si $v \ll c \Rightarrow$ on retrouve résultat classique $\Delta t \approx \Delta t'$

$\Rightarrow$ Le temps ne peut plus être considéré é absolu $\Rightarrow$ vecteur position usuellement oblique (x, y, z) remplacé par un vecteur de 4 dimensions le

quadrivecteur $\tilde{X} = (ct, x, y, z)$

Ces 4 coordonnées dépendent du ref de l'objet

$\Rightarrow$ comment ce quadrivecteur est modifié par un changement de ref en relativité restreinte?

2 - Transformation de Lorentz spéciale

Lorsque 2 ref sont en translation rectiligne uniforme l'un par rapport à l'autre et que, à l'origine des temps, leurs axes et origine coïncident, on passe de l'un à l'autre par

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \beta = \frac{v}{c} \\ \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \end{cases}$$

Types principaux (dém. p. 10)

$$\begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma v & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

→ TL linéaire $\Rightarrow$ on cherche matrice linéaire

→ Dans direct^o transverse, ni mouvement suivant x , $y=y'=0 \Rightarrow y'=y=0$

$$\Rightarrow a_{31}=a_{32}=0=a_{34} \quad \text{et} \quad a_{11}=a_{12}=0=a_{14}$$

→ Isotropie espace : invariance de la TL par rotation, or sens translat^o $\Rightarrow$ angle de π

$$\Rightarrow a_{33}(-v)=a_{33}(v) \Rightarrow a_{33}=1 \quad \text{et} \quad a_{11}=1$$

→ Isotropie espace (de 0 à 2π) $\Rightarrow a_{11}=a_{22}$

$$\Rightarrow \text{Isotropie espace} \Rightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ -\frac{v}{c} a_{11} & a_{11} \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \text{Invariance de } c \Rightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{dx'}{dt'} = c \Rightarrow a_{11}^2 = \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

* Cette transfo n'a pas d'influence sur les directions transverse $\Rightarrow \begin{pmatrix} ct' \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta \\ -\gamma\beta & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix}$

* Pour changement de ref inverse et passer de $\tilde{X}'$ à $\tilde{X}$ (on peut inverser matrice 2x2)

$\Rightarrow$ inverse la transformée de R vers R' pour passer de R' à R

$\Rightarrow$ changement de vitesse de ref $-v$ / $\gamma(-v)=\gamma(v)$ et $\beta(-v)=-\beta(v)$

$$\Rightarrow \text{TL} : \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta \\ \gamma\beta & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix}$$

* Si $v \ll c \Rightarrow \beta \rightarrow 0$ et $\gamma \rightarrow 1 \Rightarrow$ on retrouve transfo Galilée

* Importance des corrections relativistes m pour vitesses $\approx$ pour ϕ relativistes.

Sur graphes on voit que pour $\beta=0,70 \Rightarrow \gamma=1,4 \neq 1 \Rightarrow$ erreur sur prévision trajectoire ϕ prise en compte

Rmq: Distance entre 2 événements = intervalle

$$(s_2 - s_1)^2 = -c^2(t_2 - t_1)^2 + (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2$$

si événements proches $\rightarrow ds^2 = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$

Or $ds'^2 = ds^2 \Rightarrow$ intervalle entre 2 événements est un invariant relativiste (m valeur dans tout ref galiléen)

$\Rightarrow$ Invariance de l'intervalle

III - Conséquences pratiques sur la cinématique

1 - Conséquence sur les durées.

Comme on l'a vu le temps s'écoule différemment dans 2 référentiels en mouvement relatif.

On reprend l'horloge vue précédemment, au repos dans R' (immobile en O')

On considère Tic-Tac de l'horloge séparés d'une durée $\Delta t_0'$

L'horloge immobile

Quelle est la durée séparant Tic-Tac dans R ?

* Tic dans R' : $t_1' = 0, x_1' = 0 \rightarrow$ transfo Lorentz inverse $\rightarrow t_1 = 0$ et $x_1 = 0$

* Tac dans R' : $t_2' = \Delta t_0', x_2' = 0 \rightarrow$ transfo Lorentz inverse

$$t_2 = \gamma \Delta t_0' \quad x_2 = \gamma \beta c \Delta t_0' = \gamma v \Delta t_0'$$

(mica classique aurait prévu $x_2 = v \Delta t_2'$)

$\Rightarrow$ Tic-Tac dans R : $\Delta t = t_2 - t_1 = \gamma \Delta t_0'$

Or $\gamma > 1 \Rightarrow \Delta t > \Delta t_0' \Rightarrow$ Tic-Tac, car la période de l'horloge paraît $\oplus$ longue dans ref où elle est immobile (ref propre) $\Rightarrow$ phénomène de dilatation des durées.

* Temps propre: temps qui s'écoule dans le ref propre

$\hookrightarrow$ "pendant l'intervalle de l'intervalle = invariant relativiste semblable à 1 temps.

Théorème dilatation des durées

2 - Application aux muons atmosphériques.

Muon: particule chargée susceptible de se désintégrer selon $\mu^- \rightarrow e^- + \bar{\nu}_\mu + \bar{\nu}_e$

L_0 en haute atmosphère (50 km)

neutrino muonique
 $\uparrow$
antineutrino électronique

Réaction qui conduit à une loi exponentielle du nombre de muons avec T = durée de vie des muons.

$$N(t) = N_0 e^{-t/T}$$

* En labo, dans leur ref propre, on mesure $T_p = 2,2 \cdot 10^{-6} s$ $\Rightarrow$ on devrait par les données à la surface de la Terre car l'onde parcourt 600m pdt cette durée

* Même mesure par muons voyageant à $v = 0,992c$ lorsqu'ils arrivent sur Terre.

Dans ref terrestre, la durée de vie perçue doit s'allonger $T = \gamma T_p$

$\Rightarrow$ Vérification expérimentale : on place 2 détecteurs à des altitudes $\neq$ qui comptent les muons reçus L_1 et L_2

Depuis leur émission, il arrivent au temps

t_2 et t_1 qui compte $n(t_2) = n_0 e^{-t_2/T}$

t_1 et t_1 $n(t_1) = n_0 e^{-t_1/T}$

Or (graphiquement) $t_1 - t_2 = \frac{t_2 - t_1}{v}$ et $\ln\left(\frac{n_2}{n_1}\right) = -\frac{t_2 - t_1}{T}$

$$\Rightarrow T = \frac{t_2 - t_1}{v \ln\left(\frac{n_2}{n_1}\right)}$$

AN $n_2 = 563 \pm 10$ à $y_2 = 1110m$ $T = 19,9 \mu s$
 $n_1 = 608 \pm 9$ à $y_1 = 3m$

$\Rightarrow \gamma_{exp} = \frac{T}{T_p} = 9$ par $\gamma_{theo} = 7,92$ (avec meilleure prise en compte (incertitudes $\gamma_{exp} = 8,8 \pm 0,8$ $\gamma_{th} = 8,6 \pm 2$)

On a $\gamma > 1 \Rightarrow$ on observe bien dilatation des durée avec $T > T_p$

$\Rightarrow$ Ça explique pk on arrive à les observer à la surface de la Terre

3. Conséquence sur les longueurs

Que se passe-t-il par la mesure de longueurs dans 2 ref en mouvement relatif?

* Longueur propre : longueur de l'objet dans le ref où il est au repos.

Considérons une règle de longueur propre L_p , au repos dans R' et disposée suivant l'axe

$\hookrightarrow$ Comment mesure sa longueur dans R ?

$\hookrightarrow$ on va déterminer la position des extrémités de la règle à un même instant t_0

$\Rightarrow$ La longueur de la règle est donc $L = \Delta x = x_2 - x_1$ où les 2 événements A et B sont dans R

- détection de la position de la première extrémité en $t_A = 0, x_A = 0$

$$\Rightarrow \underline{t_A' = 0} \text{ et } \underline{x_A' = 0}$$

- seconde $t_B = 0, x_B = L$

$$\Rightarrow \text{Transformée de Lorentz } ct_B' = -\gamma\beta x_B \Rightarrow \underline{t_B' = -\gamma\beta \frac{L}{c}} \text{ et } \underline{x_B' = \gamma x_B = \gamma L}$$

Dans R' , règle au repos $\Rightarrow \underline{x_B' - x_A' = L_p}$

Or $x_B' - x_A' = \gamma L$ dans R'

$$\left. \begin{array}{l} L = \frac{L_p}{\gamma} < L_p \quad (\gamma > 1) \end{array} \right\}$$

$\Rightarrow$ Il y a contraction des longueurs, car règle paraît $\emptyset$ longue dans R en mouvement que R' au repos.

Rmq: Dilatation des durées et contraction des longueurs sont des effets purement cinématiques [qui ne résultent ni engendrent aucun phénomène dynamique (force)]

CONCLUSION

- $\rightarrow$ La relativité restreinte est une correction à la mécanique qui tient compte du fait qu'on a des vitesses proches de c
- $\rightarrow$ On a vu 2 conséquences assez contre-intuitives, on a vu 3 aussi:
 - Effet Doppler relativiste qui explique pourquoi le rayonnement émis par une étoile sera mesuré avec une $\neq$ de freq $\Rightarrow \lambda \Rightarrow$ décalage vers le rouge car les étoiles s'éloignent
 - Loi de composition des vitesses
 - Perte de simultanéité

$\rightarrow$ Maintenant, quel est l'effet de la relativité sur la dynamique ?