

L25: Oscillateurs, portraits de phase et non linéarité.

①

PREREQUIS:

- Oscillateur harmonique
- Mécanique du point
- Electronique - Electromécanique

INTRODUCTION

Oscillateur = système physique oscillant de part et d'autre d'une position d'équilibre stable.

Présents partout dans notre quotidien : battement du cœur, course des aiguilles d'une montre, balance d'une horloge.

Par la suite $\Rightarrow$ des modèles simplifiés avec des systèmes linéaires, dont l'oscillateur harmonique.

Us thés pas suffisant pour expliquer tous les phénomènes à la régulation du rythme cardiaque.

$\Rightarrow$ Nécessaire de développer des systèmes non linéaires car que la réponse n'est pas linéaire de l'excitation.

1.1

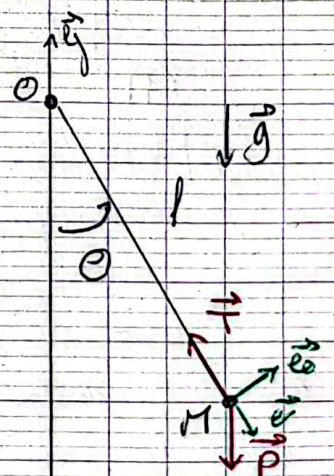
I. Système linéaire.

1. Oscillateur non amorti.

Ne pas détailler, tout sur slide car prérequis:

Système: pendule simple = fil longueur l de masse négligeable devant m
- masse m

Ref: labo galiléen.



- On se limite au mouvement dans le plan vertical
- Position repérée par angle θ du fil / verticale ascendante.
- Mouvement circulaire uniforme $\vec{v} = l\dot{\theta}\vec{e}_\theta \Rightarrow \underline{E_c = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2}$

BdF: $-\vec{P} = m\vec{g} = m(\cos\theta\vec{e}_r - \sin\theta\vec{e}_\theta)$

$-\vec{T}$: tension du fil - ne travaille pas car direction $\perp$ au mouvement

$\vec{P}$ = force conservative $\Rightarrow$ dérive d'un $E_p \Rightarrow E_p = mgy + \text{cst} = -mgl\cos\theta + \text{cst}$

On choisit $E_p = 0$ pour $\theta = 0 \Rightarrow \text{cst} = mgl$

$\Rightarrow \underline{E_p = mgl(1 - \cos\theta)}$

Hyp 1: ϕ de forces dissipatives (frottements) $\Rightarrow E_m$ se conserve $\Rightarrow \frac{dE_m}{dt} = 0$
avec $E_m = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + mgl(1 - \cos\theta)$

$\Rightarrow ml^2\ddot{\theta} + mgl\sin\theta = 0 \Rightarrow \boxed{\ddot{\theta} + \omega_0^2 \sin\theta = 0} \quad \boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}}$

$\Rightarrow$ équation non linéaire à cause du sinus. (0)

Hyp 2: Approximation des petits angles (dev de Taylor autour de position stable ($\theta=0$)) $\Rightarrow \sin\theta \approx \theta$

$\Rightarrow \boxed{\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0}$

(1)

Eq différentielle linéaire de l'oscillateur harmonique non amorti

Période propre $\boxed{T_0 = 2\pi/\omega_0}$

* Solutions purement sinusoïdale de pulsation propre ω_0

$x(t) = A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t$ ou $x(t) = x_0\cos(\omega_0 t + \phi)$

Etude du portrait de phase.

def sur slide

- complètement sur espace des $\mathcal{U}$: pour syst méca, toutes les valeurs possibles des variables de positions et impulsions

À chaque instant, Z est entièrement caractérisé par sa position, déduite de θ , et sa vitesse, déduite de $\dot{\theta} \Rightarrow$ on peut associer un repère $(\dot{\theta}, \theta) = \text{plan de phase}$

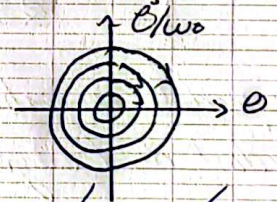
$\hookrightarrow$ on peut représenter l'évolution d'un état au cours du temps à partir de CI $\Rightarrow$ trajectoire de phase

$\Rightarrow$ Exemple des trajectoires possible $\equiv$ portrait de phase $\equiv$ décrit complètement global du système.

Sol de CI: $\theta(t) = A \sin(\omega_0 t + \varphi) \Rightarrow \dot{\theta}(t) = A \omega_0 \cos(\omega_0 t + \varphi)$

or $\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \Rightarrow \boxed{\frac{\theta^2}{A^2} + \frac{\dot{\theta}^2}{\omega_0^2 A^2} = 1}$ eq d'une ellipse $\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \right)$

Dans le plan des $\varphi(\theta, \dot{\theta}) \Rightarrow$ cercles concentriques centrés sur origine des coordonnées (car sol purement sinusoïdale) $\Rightarrow$ rayon = amplitude des oscillations
 rmq: si plan des $\varphi(\theta, \dot{\theta}) \Rightarrow$ ellipses.



Caractéristique des oscillations:

* périodiques: car trajectoire fermée $\Rightarrow$ au bout d'une certaine durée T un point revient à sa position initiale.

* sinusoïdales: car ellipse ou cercle suivant le plan de φ .

* ellipses = courbes iso-énergétiques (eq ellipse traduit conservation E)

* linéaires: si θ est sol $\Rightarrow \alpha \theta$ aussi $\Rightarrow$ oscillateur ne vibre pas à une amplitude quelconque, elle dépend des CI $\Rightarrow$ oscillations harmoniques.

* réversibles: car symétrie $\Rightarrow t \leftrightarrow -t$: involution par renversement du temps.

* point fixe (0,0) $\Rightarrow$ ϕ de déplacement $\equiv$ oscillations autour de ce point

rmq: les trajectoires ne peuvent pas se croiser car par déterminisme physique en Z dans un état donné n'a qu'une seule façon d'évoluer.

Mais ce modèle n'est pas réel pour un vrai système, les oscillations finissent toujours par s'amortir.

* Animation portrait de phase pour lien slide (jeinto-4)

2. Oscillateur amorti.

On introduit la force de frottement: ici on fait l'hyp (simple) qu'elle dépend de la vitesse angulaire $\Rightarrow$ frottements fluides $\Rightarrow$ force non conservative
 $\Rightarrow E_m$ ne se conserve plus $\Rightarrow \frac{dE_m}{dt} = \mathcal{P}(\vec{f}_{\text{visc}})$

avec ici $\vec{f}_{\text{visc}} = \vec{f} = -h\dot{\theta}$

Pour petits angles $\Rightarrow \cos \theta \approx 1 - \frac{\theta^2}{2} \Rightarrow E_p = \frac{1}{2} mgl\theta^2 \Rightarrow E_m = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} mgl\theta^2$

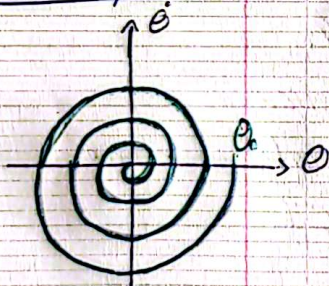
$\Rightarrow \frac{dE_m}{dt} = -h\dot{\theta}^2 = m l^2 \ddot{\theta} \dot{\theta} + mgl\theta \dot{\theta}$

$\ddot{\theta} + 2\zeta\omega_0 \dot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0$ avec $\zeta = \frac{h}{2m l^2} \sqrt{\frac{l}{g}} > 0 = \text{facteur d'amortissement}$
 $\ddot{\theta} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0$

$Q = \frac{1}{2\zeta} = \text{facteur de qualité}$

$\rightarrow$ Le pendule va continuer à osciller tout en perdant de l'énergie. Il va décrire des ellipses jusqu'au point fixe.

Portrait de phase:



Caractéristiques des oscillations

- pseudo-périodiques: en spirale, freq de passage à 0
 $\hookrightarrow$ si $Q > 1/2$ reste coté max amplitude $\downarrow$
- homothétiques: car eq d'II linéaire
- irréversibles: l'axe $\dot{\theta}$ brise l'invariance par renversement de t
- point attracteur: enroulement vers le point fixe
 $\hookrightarrow$ les oscillations arrivent à Σ d'où on est près de point d'éq

mq: Q représente le nbre d'oscillations visibles sur le portrait de θ

$\oplus Q$ grand $\Rightarrow \oplus$ oscillations observables.

(mq si amortissement faible ($Q > 1/2$): $\theta(t) = \theta_0 e^{-\frac{\omega_0}{2Q} t} \sin(\Omega t + \phi)$ avec $\Omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$)
 $\Rightarrow$ jet sinusoidal • pseudo pulsat° Ω
 • amplitude modulée par exp de temps caractéristique $\tau = \frac{2Q}{\omega_0}$

Ici, approximation des petits angles $\Rightarrow$ phénomènes linéaires.
 Maintenant pour tous les angles.

II - Système non linéaire:

1 - Apparition d'harmoniques: le pendule de Borda.

On néglige les frottements (pour simplifier) $\Rightarrow$ conservation E_m

Pour grand angle du Taylor ordre 2 plus valable (cf carte) $\Rightarrow$ dev ordre 4.

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \quad \sin x = x - \frac{x^3}{3!}$$

Dans (e) $\Rightarrow \ddot{\theta} + \omega^2 \left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} \right) = 0 \Rightarrow$ terme en $\theta^3 \Rightarrow$ non linéaire.
 (3)

Comment résoudre cette eq, si on injecte la sol d'ordre 1 de type $\theta \sin(\omega t)$ et apparaît un $\sin^3(\omega t)$ qui se développe en

$$\boxed{\sin^3(\omega t) = \frac{3}{4} \sin(\omega t) - \frac{1}{4} \sin(3\omega t)}$$

amplitude des oscillations
avec $\omega \neq 3\omega$

$\Rightarrow$ On recherche des solutions de type $\theta(t) = \theta_m \left(\sin(\omega t) + \epsilon \sin(3\omega t) \right)$

Or dev de $\theta^3(t)$ à l'ordre 1 en $\epsilon \Rightarrow \theta^3(t) \approx \theta_m^3 \left(\sin^3(\omega t) + 3\epsilon \sin^2(\omega t) \sin(3\omega t) \right)$
 $\hookrightarrow \epsilon \ll 1$

démo: $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ avec $a = \sin(\omega t)$ et $b = \epsilon \sin(3\omega t)$

$$\Rightarrow \theta^3(t) = \theta_m^3 \left(\sin^3(3\omega t) + 3\epsilon \sin^2(\omega t) \sin(3\omega t) + 3\epsilon^2 \sin(\omega t) \sin^2(3\omega t) + \epsilon^3 \sin^3(3\omega t) \right)$$

ordre 2 ordre 3

Donc en injectant sol dans (3)

$$\begin{aligned} & -\omega^2 \theta_m \sin(\omega t) - 9\epsilon \omega^2 \theta_m \sin(3\omega t) + \omega^2 \left[\theta_m \left(\sin(\omega t) + \epsilon \sin(3\omega t) \right) - \frac{\theta_m^3}{6} \left(\sin^3(\omega t) \right. \right. \\ & \left. \left. + 3\epsilon \sin^2(\omega t) \sin(3\omega t) \right) \right] = 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \sin(\omega t) \Theta_m \left[-\omega^2 + \omega_0^2 - \frac{\Theta_m^2}{6} \times \frac{3\omega^2}{4} \right] + \sin(3\omega t) \Theta_m \left[-9\epsilon \omega^2 + \epsilon \omega_0^2 - \frac{\Theta_m^2}{6} \frac{1}{4} \omega_0^2 \right]$$

$$- \omega^2 \frac{\Theta_m^3}{6} \times 3\epsilon \sin^2(\omega t) \sin(3\omega t) = 0$$

, et aussi car $\Theta_m \ll 1$ et $\epsilon \ll 1$.

on néglige car terme en $\sin^2(\omega t)$ n'apparaît pas dans exp

$$\Rightarrow \sin(\omega t) \Theta_m \left[\omega_0^2 \left(1 - \frac{\Theta_m^2}{8} \right) - \omega^2 \right] + \sin(3\omega t) \Theta_m \left[\epsilon (\omega_0^2 - 9\omega^2) - \frac{\Theta_m^2}{24} \omega_0^2 \right] = 0$$

Vrai $\forall t \Rightarrow$ terme devant $\sin(\omega t)$ et $\sin(3\omega t)$ doivent être nuls.

$$* = 0 \Rightarrow \omega^2 = \omega_0^2 \left(1 - \frac{\Theta_m^2}{8} \right) \Rightarrow \omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{\Theta_m^2}{8}}$$

$$\Rightarrow \text{si } \Theta_m \ll 1 \Rightarrow \frac{\Theta_m^2}{8} \ll 1 \Rightarrow \text{DL } \omega = \omega_0 \left(1 - \frac{\Theta_m^2}{16} \right)$$

$$\text{Or } \omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega_0} \times \frac{1}{1 - \Theta_m^2/16} = T_0 \left(1 - \frac{\Theta_m^2}{16} \right)^{-1}$$

$$\Rightarrow \text{Al } \Rightarrow \boxed{T = T_0 \left(1 + \frac{\Theta_m^2}{16} \right)} \quad \text{Formule de Berda.}$$

$\Rightarrow$ La période T des oscillations dépend de l'amplitude des oscillations Θ_m
 $\Rightarrow$ petite de l'isochronisme.

Rmq: terme en $\Theta^3 \Rightarrow$ harmonique en 3ω ($\sin(3\omega t)$) $\Rightarrow$ enrichissement spectral

2 - Expérience. Expe géomé. Fréchet.

* Mesure T par angles Θ_0

- Trace $T = f(\Theta_0^2) \Rightarrow$ on fait un fit linéaire $\Rightarrow T(\Theta) = a + b\Theta^2 \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{1}{16}$

$$T = f(\Theta_0) \Rightarrow \text{poly} \Rightarrow T(\Theta) = a + b\Theta + c\Theta^2 \Rightarrow \frac{c}{a} = \frac{1}{16}$$

mais si dev sup $\Rightarrow T(\Theta) = T_0 \left(1 + \frac{1}{16} \Theta_m^2 + \frac{11}{384} \Theta_m^4 \right)$

(Le fit poly) $T(\Theta) = a + b\Theta + c\Theta^2 \Rightarrow$ on retrouve $\frac{b}{a} = \frac{1}{16}$ par $\frac{c}{a} = \frac{11}{384}$ bf

* On mesure $\Theta(t)$ avec phyphox + $\int t \Rightarrow$ pic principal se décale avec amplitude oscillations
 $\Rightarrow$ petite isochronisme
 $\Rightarrow$ pic à $3\omega \Rightarrow$ enrichissement spectral.

3 - Portrait de phase et lien.

- * Sans frottements :
 - périodique ou aperiodique
 - ellipse $\Rightarrow$ signe apparition des non linéarités.
 - réversible

- * Si frottements :
 - $\neq$ réversible
 - $\neq$ cyclique $\Rightarrow$ converge vers 1 point fixe $\equiv$ attracteur
 - $\hookrightarrow$ $\neq$ forcément 1 point
 - peut être 1 ellipse

Bilan non linéarités impliquent

- nouveaux harmoniques
- variation de T en fct de l'amplitude

Or tous les oscillateurs ont des sources d'amortissement. Partant, pour harloge, on a des oscillations qui évoluent indéfiniment de façon périodique $\Rightarrow$ Oscillateurs auto-entretenus.

III - Oscillateurs auto-entretenus.

1 - Modèle de Van der Pol.

Par q'il ne harloge évolue indéfiniment de façon périodique, elle doit recevoir de l'E par compensation les phénomènes dissipatifs.

$\hookrightarrow$ qui viennent du terme $2Y_0 x$ devant $\ddot{x}$ de eq oscillateur amorti.

De manière générale en notant $\alpha = 2Y_0 / \omega_0 \Rightarrow$ eq oscillateur amorti de la forme

$$\ddot{x} + \alpha \dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

- si $\alpha > 0 \Rightarrow \Sigma$ décrit par eq diff instable $\Rightarrow$ amplitudes des oscillat° va diverger.
- $\alpha < 0 \Rightarrow$ oscillateurs amortis.

⇒ Pour pouvoir avoir des oscillations qu'on souhaite obtenir, il faut que α change de signe en fonction de x :

- petites oscillations doivent être amplifiées: x petit $\Rightarrow \alpha < 0$
- grandes ———— atténuées: x grand $\Rightarrow \alpha > 0$

Une modélisation simple pour ça est $\alpha(x) = \alpha_0 \left(\frac{x^2}{x_0^2} - 1 \right)$

⇒ Eq dynamique de l'oscillateur $\ddot{x} + \alpha_0 \left(\frac{x^2}{x_0^2} - 1 \right) \dot{x} + \omega_0^2 x = 0$ Eq de Van der Pol

(rmq: $x \rightarrow \frac{x}{x_0} \sqrt{x} \Rightarrow \ddot{x} - (\epsilon - x^2) \dot{x} + x = 0$ avec $\epsilon = \alpha > 0$)
 $\Rightarrow \ddot{x} + \mu (x^2 - 1) \dot{x} + x = 0$ avec $\mu = 1/\epsilon = 1/\alpha$)

⇒ Eq non linéaire: les non-linéarités sont nécessaires pour l'entretien des oscillations.

Portrait de phase d'animation. $a \approx \alpha_0$ $b \approx x_0$ $c \approx \omega_0$

- $\alpha_0 = 0 \Rightarrow$ oscillateur harmonique

si $\alpha_0 \neq 0 \Rightarrow$ déformations importantes des oscillations et portrait de ψ
 $\Rightarrow$ non linéarité $\Rightarrow$ cycle ne déforme.

- α_0 : contrôle amplitude des oscillations.

- CI: même avec faibles CI $\Rightarrow$ oscillations prennent naissance et se stabilisent. Le portrait de ψ montre un cycle limite qui ne dépend pas de CI.

2 - Oscillateur à résistance négative.

Utilisés pour compenser les pertes dues aux amortissements.

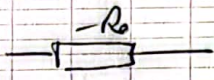
Eq de RLC: $\ddot{u}_c + \frac{R}{L} \dot{u}_c + \frac{1}{LC} u_c = 0 \Rightarrow$ amortissement à cause du terme $\frac{R}{L}$

⇒ On ajoute la partie résistance négative.

Partie résistance négative: AO idéal $\Rightarrow i^+ = i^- = 0$

* Régime linéaire: $E = V^+ - V^- = 0 \Rightarrow R_1 i' + R_2 i = 0 \Rightarrow i' = -i \frac{R_2}{R_1}$

De plus, $U_{AM} = U_{R0} = -R_0 i' = -R_0 \frac{R_2}{R_1} i$

Si $R_1 = R_2 \Rightarrow U_{AM} = -R_0 i \Rightarrow$ une résistance L_0 

* Régime saturé: $V_s = \pm V_{sat}$ avec $i_{lim} = \frac{V_{sat}}{R_0 + R_1} \Rightarrow |i| > i_{lim}$

• $U_{AM} = R_2 i + V_{sat}$ si $i < i_{lim}$

• $U_{AM} = R_2 i - V_{sat}$ si $i > i_{lim}$

Partie RLC: Loi des mailles: $L \frac{di}{dt} + ri + \frac{q}{C} + U_{AM} = 0$

* Régime linéaire: $\Rightarrow L \frac{di}{dt} + ri + \frac{q}{C} - R_0 i = 0$

$$\Rightarrow \frac{di}{dt} + \frac{1}{L} (r - R_0) i + \frac{q}{LC} = 0 \xrightarrow{d/dt} \boxed{\frac{d^2 i}{dt^2} + \underbrace{\frac{r - R_0}{L}}_{dL} \frac{di}{dt} + \frac{1}{LC} i = 0}$$

On choisit $R_0 > r \Rightarrow \alpha r < 0 \Rightarrow$ naissance d'oscillations $\Rightarrow$ amplitude des $\nearrow$ jusqu'à saturation.

* Régime saturé: $L \frac{di}{dt} + ri + \frac{q}{C} + R_2 i = \pm V_{sat}$

$$\frac{d}{dt} \Rightarrow \boxed{\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{r + R_2}{L} \frac{di}{dt} + \frac{1}{LC} i = 0}$$

$\alpha s > 0 \Rightarrow$ amortissement des oscillations $\Rightarrow i \searrow$ et on repasse en régime linéaire et ainsi de suite

$\Rightarrow$ amplitude des oscillations se stabilise.

mg: On peut modéliser U_{AM} par jet cubique

$$U_{AM} = -R_0 i + \lambda i^3$$

$$\Rightarrow \frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{r + 3\lambda i^2 - R_0}{L} \frac{di}{dt} + \frac{1}{LC} i = 0 \text{ pour régime non linéaire}$$

$$\Rightarrow \left[\frac{di^2}{dt^2} + \alpha_0 \left(\frac{i^2}{i_0^2} - 1 \right) \frac{di}{dt} + \omega_0^2 i = 0 \right] \quad \text{Forme eq de Van der Pol avec}$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad \alpha_0 = \frac{R_0 - r}{L}, \quad i_0 = \sqrt{\frac{R_0 - r}{3A}}$$

Portrait de phase

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad \frac{r - R_0}{L} = \frac{\omega_0}{Q}, \quad \frac{r + R_0}{L} = \frac{1}{Q}, \quad x = \frac{i}{i_{em}}$$

$$\text{lin} \Rightarrow \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0, \quad |x| < 1$$

$$\text{sat} \Rightarrow \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{1}{Q} \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0, \quad |x| > 0$$

fonctionnement oscillateur. si $x=0 \Rightarrow$ posit° eq instable

partant de x_0 faible, oscillations amplifiées jusqu'à $x > 1$. Puis ΣC oscillateur amorti $\Rightarrow$ redescend rapidement sans sa valeur de saturation.

$\Rightarrow \Sigma$ passe (c'est Van der Pol) alternativement par Q amplification et amortissement.

CONCLUSION

+ Conséquences non linéarité $\rightarrow$ perte isochronisme oscillateur.

$\rightarrow$ enrichissement spectral

$\rightarrow$ utilisation pour oscillateurs auto-entretenus.

+ Intérêt du portrait de phase: permet de décrire les propriétés des oscillateurs sans besoin de connaître eq.

si $\Sigma C \Rightarrow$ portrait Q aide à choisir 1 modèle.