

Phénomènes de résonance dans différents domaines de la physique

→ cherche application autre que standard et @ appliquée

[22]

Figure imposée: Illustrer expérimentalement la notion de résonance en torsion et courant en élec.

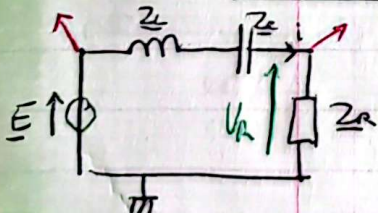
- Prérequis:
- Electrodynamique : RLC en régime libre et transitoire + impédance
 - Mécanique classique
 - Optique ondulatoire : Fabry-Pérot, notion d'interférences à ondes multiples
 - Notation complexe.

INTRODUCTION

- Phénomène de résonance qui présente des φ → principe de l'adaptation d'impédance aussi parfois on favorise on s'en approche
- Résonance: transfert d'énergie maximal entre excitateur et oscillateur. → approche E hf, plutôt à mettre en remarque
- On va s'intéresser aux systèmes linéaires. une grandeur de sortie Σ présente une valeur max à l'et de excitation qu'on fait varier
- Degré de liberté: concept indiquant les $\neq$ modalités suivant lesquelles l'état d'un $\Sigma \varphi$ peut évoluer librement dans le temps. (cad évolue librement sans contrainte)

I. Etude d'un système à 1 degré de liberté: le RLC (série)

1. Résonance en courant: aspect énergétique → Récupérer la partie avec



Résonance = transfert maximal de puissance entre excitateur (générateur) et l'oscillateur (RLC) recherche amplitude max pour remarque

à la résonance on a un transfert max E

Or on peut exprimer la puissance totale dans le circuit:

$$P_G = e(t) \cdot i(t) = Ri^2 + i \times L \frac{di}{dt} + U_C \times C \frac{dU_C}{dt}$$

$$\Rightarrow P_G = \underbrace{Ri^2}_{P_R} + \underbrace{\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} Li^2 \right)}_{P_{L, \text{mag}}} + \underbrace{\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} CU_C^2 \right)}_{P_{C, \text{elec}}}$$

Régime méca 1

⇒ La puissance électrique fournie par le générateur est dissipée par effet Joule ② et fait varier E et ϵ dans le circuit.

(E avec stockage ds Π se décharge et E_{mag} se charge dans m , puis se décharge)
 ⇒ i charge des uns pour charges Π , etc ⇒ phénomène d'oscillation
 c E_p et E_e dans le Σ perdible en méca et $P_s \approx$ frottements.

Or ici, le GBF impose 1 puissance au circuit ⇒ régime sinusoïdal forcé
 ⇒ puissance fournie par GBF ne sert qu'à compenser les pertes par effet Joule.
 ⇒ $\langle P_o \rangle = \langle P_s \rangle$

Or $\langle P_s \rangle = \langle RI^2 \rangle \Rightarrow I ?$ or $U_R = RI \Rightarrow U_R = ?$

Régime sinusoïdal forcé ⇒ travail avec impédance + diviseur de tension

$$U_R = \frac{Z_R}{Z_R + Z_C + Z_L} \cdot E = \frac{R \cdot E}{R + \frac{1}{j\omega C} + j\omega L} = \frac{jR\omega \cdot E}{1 - L\omega^2 + jR\omega}$$

⇒ $U_R = \frac{R\omega \cdot E}{\sqrt{(1 - L\omega^2)^2 + (R\omega)^2}}$, si on pose $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, $x = \frac{\omega}{\omega_0}$ et $Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$

⇒ $U_R = \frac{E}{\sqrt{1 + Q^2(x - \frac{1}{x})^2}} \Rightarrow I = \frac{E/R}{\sqrt{1 + Q^2(x - \frac{1}{x})^2}}$

⇒ $\langle P_o \rangle = \frac{E^2/R}{1 + Q^2(x - \frac{1}{x})^2} \Rightarrow$ max de transfert de puissance entre GBF et oscillateur pour $x=1$

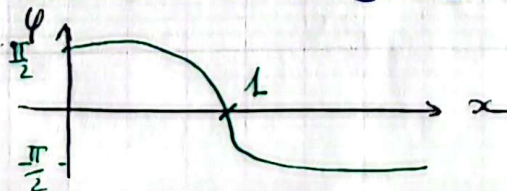
⇒ résonance pour $x=1$, $\omega_r = \omega_0$

→ Remq 1: $L = 10 \text{ mH}$ $\left\{ \begin{array}{l} \omega_0 = 9,81 \cdot 10^3 \text{ rad.s}^{-1} \Rightarrow f = f_0 = 1570 \text{ Hz} \\ C = 100 \text{ nF} \end{array} \right.$ ↳ reparte hauteur E à mesure de L, C, R et RL C mètre.

→ Remq 2: $H = \frac{U_R}{E} = \frac{1}{1 + jQ(x - \frac{1}{x})} \Rightarrow \varphi = \arg H = -\arctan(Q(x - \frac{1}{x}))$

⇒ à la résonance $x=1 \Rightarrow \varphi = -\arctan 0 = 0 \Rightarrow U_R$ et E en $\varphi \Rightarrow$ f rep avec XY.

⇒ $x \rightarrow 0 \Rightarrow \varphi \rightarrow \frac{\pi}{2}$
 $x \rightarrow +\infty \Rightarrow \varphi \rightarrow -\frac{\pi}{2}$



→ Rmq 3: Si on pose $f(x) = 1 + Q^2(x - \frac{1}{x})^2 \Rightarrow U_R = \frac{E}{\sqrt{f}}$ et $I = \frac{E/R}{\sqrt{f}}$ ③

$$\Rightarrow f'(x) = 2Q^2(x - \frac{1}{x})(1 + \frac{1}{x^2})$$

x	0	1	$+\infty$
f'	-	0	+
f			
U/I			

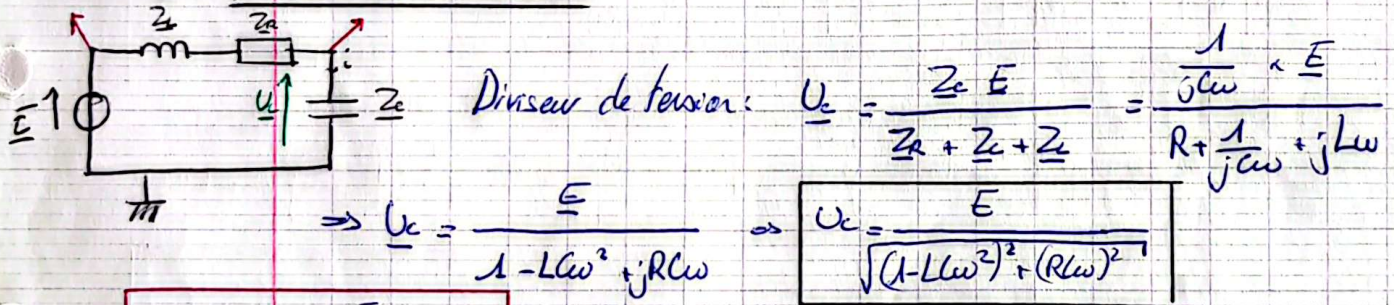
$\Rightarrow U_R$ admet toujours un maximum
 $I \Rightarrow$ toujours résonance en courant

→ Rmq 4: prendre en compte R_{ext} et R_i pour expérience $\Rightarrow U_R = \frac{Z_R}{Z_R + Z_{R_i} + Z_{R_{ext}}} \cdot E$
 $\Rightarrow U_R = \frac{jRL\omega E}{\sqrt{(1 - L^2\omega^2)^2 + (L\omega(R + R_i))^2}}$

→ Rmq 5 So $R \nearrow \Rightarrow Q \searrow \Rightarrow$ pic de résonance $\odot$ marqué $\Rightarrow$ résonance $\odot$ aigüe
 paramètre : acuité de résonance $\frac{\omega_0}{\Delta\omega}$
 $\Rightarrow \frac{1}{1 + Q^2(x - \frac{1}{x})^2} = \frac{1}{2} \Rightarrow Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega}$
 largeur qui donne $I > \frac{I_{max}}{\sqrt{2}}$
 $\sim -3dB$

→ Rmq 6: $Gdb = 20 \log(H)$
 à définir en son

2 - Résonance en tension



$$\Rightarrow U_C = \frac{E}{1 - L^2\omega^2 + jRL\omega} \Rightarrow U_C = \frac{E}{\sqrt{(1 - L^2\omega^2)^2 + (RL\omega)^2}}$$

$$\Rightarrow U_C = \frac{E}{\sqrt{1 - \omega^2 + (\frac{\omega}{Q})^2}}$$

Rmq 7 Si on pose $g(x) = (1 - x^2)^2 + (\frac{x}{Q})^2 \Rightarrow U_C = \frac{E}{\sqrt{g(x)}}$

Or $f'(x) = 4x(x^2 - 1 + 1/2Q^2) = 0 \Rightarrow x = 0$, or $x = 1$ ou $x = -1 \Rightarrow U_C \rightarrow \Rightarrow$ résonance
 $\Rightarrow x = \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}} \Rightarrow Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$

x	0	x_r	$+\infty$
g'	-	0	+
g			
U_C			

$\Rightarrow$ max amplitude pour $x = x_r \Rightarrow$ résonance en tension

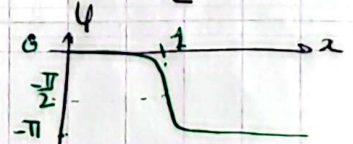
$$\Rightarrow U_{Cmax} = \frac{2Q^2 E}{\sqrt{4Q^2 - 1}} > E \Rightarrow \text{surtension}$$

$$> 1 \Rightarrow Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$$

On montre ça exp

→ Rmq 8: $Q \nearrow \Rightarrow$ pic $\odot$ étroit $\Rightarrow$ résonance $\odot$ aigüe

→ Rmq 9: $\varphi = \arg(H) = \arg(\frac{U_C}{E}) = -\frac{\pi}{2} + \arctan(\frac{1 - x^2}{x/Q})$
 $x \rightarrow 0 \Rightarrow \varphi \rightarrow 0$
 $x \rightarrow \infty \Rightarrow \varphi \rightarrow -\pi$
 $x = 1 \Rightarrow \varphi = -\frac{\pi}{2}$



3- Analogie électromécanique en I1 - après manip intro

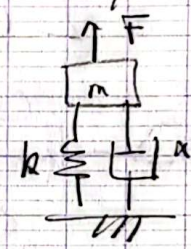
④

Gintemède -

masse ressort

ou I2 - pour faire lien

⇒ équivaut à oscillateur harmonique



⇒ Résonance aussi en méca.

	Electrocinétique	Mécanique
Variable	Charge q	Position x
Dérivée temporelle	Intensité $i = \frac{dq}{dt}$	Vitesse $\frac{dx}{dt}$
Inertie	Inductance L	Masses m
Dissipation	Résistance R	Frottements α
Raidleur	Inverse capacité $1/C$	Raidleur k
Forçage	Tension e	Force F
Pulsation propre	$\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$	$\omega_0 = \sqrt{k/m}$
Facteur de qualité	$Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$	$Q = \frac{1}{\alpha} \sqrt{mk}$

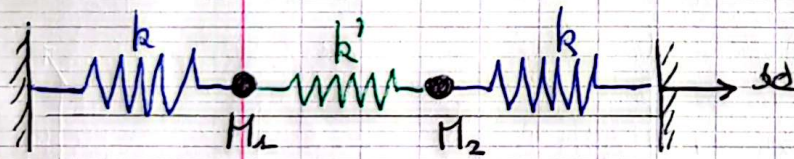
que en méca on s'intéresse à position ⇒ plutôt capacité

Jusqu'ici Σ à 1 degré de liberté, et si 2. à position ⇒ plutôt capacité

II - Oscillateur couplé à 2 degrés de liberté → avoir 2 modes propres. et Σ

Ref: labo galiléen à 2DL

Hypothèse: pas de frottements.



*10
Systèmes: masse M_1 et masse M_2 de masse m

P.D à chaque système $\Rightarrow$ en notant x_i le déplacement de la masse i par rapport à sa position d'équilibre.

$$\text{M}_1: m \frac{dx_1^2}{dt^2} = -kx_1 + k'(x_2 - x_1) \quad (1)$$

$$\text{M}_2: m \frac{dx_2^2}{dt^2} = -kx_2 - k'(x_2 - x_1) \quad (2)$$

On a 2 coordonnées dont les évolutions temporelles sont indépendantes

⇒ équations couplées, mais linéaires (à x_1 et x_2)

⇒ pour découpler somme et différence des 2 eq

$$(1) + (2) \quad s = x_1 + x_2: m \frac{ds^2}{dt^2} = -ks$$

$$(1) - (2) \quad d = x_1 - x_2: m \frac{d^2d}{dt^2} = -(k + 2k')d$$

Eg d'oscillateurs harmoniques avec pulsation propres indépendantes
 $\omega_s = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \omega_d = \sqrt{\frac{k+2k'}{m}}$

dont on connaît la solution

$$\begin{cases} s(t) = A_s \cos(\omega_s t + \phi_s) \\ d(t) = A_d \cos(\omega_d t + \phi_d) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1(t) = \frac{A_s}{2} \cos(\omega_s t + \phi_s) + \frac{A_d}{2} \cos(\omega_d t + \phi_d) \\ x_2(t) = \frac{A_s}{2} \cos(\omega_s t + \phi_s) - \frac{A_d}{2} \cos(\omega_d t + \phi_d) \end{cases}$$

avec ω_s et ω_d les modes propres du Σ (cad sol de l'eq qui respectent CL)

→ On recommence ici le reste on l'a déjà vu

Maintenant on applique une force sur M_1

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 = -kx_1 + k'(x_2 - x_1) + F_m \cos \omega t \\ m\ddot{x}_2 = -kx_2 - k'(x_2 - x_1) \end{cases}$$

On est en régime sinusoïdal forcé $\Rightarrow \underline{x}_1 = X_{1m} e^{j\omega t} e^{j\phi_1}$ et $\underline{x}_2 = X_{2m} e^{j\omega t} e^{j\phi_2}$

$$\begin{cases} m_1(-\omega^2 \underline{x}_1) = -k\underline{x}_1 + k'(\underline{x}_2 - \underline{x}_1) + F_m e^{j\omega t} \\ m_2(-\omega^2 \underline{x}_2) = -k\underline{x}_2 - k'(\underline{x}_2 - \underline{x}_1) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \underline{x}_1 = \frac{(k + k' - m\omega^2) F_m}{(k + k' - m\omega^2)^2 - k'^2} e^{j\omega t} \quad \text{et} \quad \underline{x}_2 = \frac{k' F_m}{(k + k' - m\omega^2)^2 - k'^2}$$

Après calcul on peut exprimer les amplitudes max de x_1 et x_2 en fct de ω la pulsation de l'excitateur. → peut s'annuler → antirésonance

$$\Rightarrow X_{1m} = \left| \frac{(k + k' - m\omega^2) F_m}{(k + k' - m\omega^2)^2 - k'^2} \right| \quad \text{et} \quad X_{2m} = \left| \frac{k' F_m}{(k + k' - m\omega^2)^2 - k'^2} \right|$$

Pour avoir résonance on veut une amplitude max cad dénominateur $\rightarrow 0$

$$\Leftrightarrow (k + k' - m\omega^2)^2 - k'^2 = 0 \rightarrow \begin{cases} \omega_1 = \sqrt{\frac{k'}{m}} = \omega_s \\ \omega_2 = \sqrt{\frac{k + 2k'}{m}} = \omega_d \end{cases}$$

→ résonance pour $\omega = \omega$ propres du système couplé (sans frottements)

RLC, 1 ω_r pour 1 DL, ici 2 ω_r pour 2 DL → coïncidence ?

→ Généralisable : Σn DL $\Rightarrow n$ ω_r
 $\Rightarrow \Sigma$ avec ∞ DL $\Rightarrow \infty$ ω_r

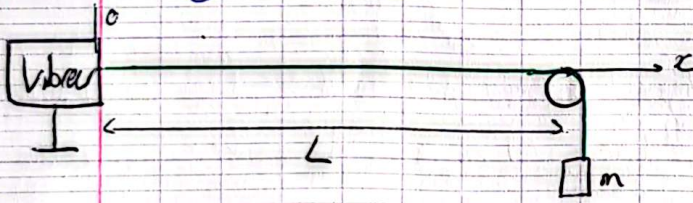
III - Etude de systèmes à n degrés de liberté

1. La corde de Melde

→ pratique car les forces exercées par les autres morceaux de cordes sont tangente à la corde

Hypothèses: corde sans raideur, inextensible, tendue dont le poids est négligeable devant la tension, pas frottements fluides,

Corde de Melde = limite continue $N \rightarrow +\infty$ de ce qu'on vient de voir avec oscillateurs couplés.
 = chaque segment infinitésimal de corde $\equiv$ oscillateur couplé aux 2 segments adjacents $\Rightarrow \infty$ modes propres.



Corde de longueur L excitée en $x=0$ et fixe en $x=L$
 La amplitude en tout point M de la corde $A(M)$?

~~En régime établi~~, Autre point de vue: l'excitateur fournit une vibration qui va se réfléchir en $x=L$ (en changeant de signe), puis en $x=0$, puis à nouveau en $x=L$, etc

$\Rightarrow$ en régime établi, le point M est soumis à une ∞ ondes qui ont subi des réflexions en 0 et L .

- on note R : les coeff de réflexions en $x=0$ et L qu'on considère égaux
- à chaque réflexion l'onde est déphasée de π .

L'excitateur envoie une OPPH qui se propage le long de la corde (eq D'Alembert)

$\Rightarrow$ déphasage à position x due à propagation $\phi_a = \frac{2\pi}{\lambda} x$

Les pois réflexions sur L avec coeff $-R$ et déphasage $\phi_r = \frac{2\pi}{\lambda} (L-x)$

Amplitude A $A(M) = \sum_n A_n \cos(k_n x - \omega t) = \sum_n a e^{-i\phi_a} + a R e^{-i(\phi_a + \phi_r)} + \dots$
 ~~$= a e^{-i\phi_a} + a R e^{-i(2\pi(L-x)/\lambda)} + a R^2 e^{-i(2\phi_a + 2\phi_r)} + \dots$~~
 ~~$= a e^{-i\phi_a} + a R e^{-i(2\pi(L-x)/\lambda)} + a R^2 e^{-i(2\phi_a + 2\phi_r)} + \dots$~~

→ Faire $\oplus$ classique.

$$\begin{aligned} \underline{A}(M) &= a e^{-i\phi x} - a R e^{-i\phi} e^{-i(\phi-\phi x)} + a R^2 e^{-i2\phi} e^{-i\phi x} - a R^3 e^{-i3\phi} e^{-i(\phi-\phi x)} + \dots \quad (7) \\ &= a e^{-i\phi x} - a R e^{-i(2\phi-\phi x)} + a R^2 e^{-i(2\phi-\phi x)} - a R^3 e^{-i(4\phi-\phi x)} + \dots \\ &= a e^{-i\phi x} (1 + R^2 e^{-i2\phi} + \dots) - a R e^{-i(2\phi-\phi x)} (1 + R^2 e^{-i2\phi} + \dots) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \underline{A}(M) = a e^{-i\phi x} \sum_{n=0}^{\infty} (R^2 e^{-i2\phi})^n - a R e^{-i(2\phi-\phi x)} \sum_{n=0}^{\infty} (R^2 e^{-i2\phi})^n$$

$R < 1$
↳ suite geo converge

$$= a e^{-i\phi x} \cdot \frac{1}{1 - R^2 e^{-i2\phi}} - a R e^{-i(2\phi-\phi x)} \cdot \frac{1}{1 - R^2 e^{-i2\phi}}$$

$$\Rightarrow \underline{A}(M) = a \cdot \frac{e^{-i\phi x} - R e^{-i(2\phi-\phi x)}}{1 - R^2 e^{-i2\phi}}$$

Amplitude: $Re(\underline{A}) = A A^* = |a|^2 \frac{(1-R)^2 + 4R \sin^2(\phi-\phi x)}{(1-R^2)^2 + 4R^2 \sin^2(\phi)}$

Pour avoir résonance on veut une amplitude max $\Rightarrow \sin^2 \phi = 0$

$$\Rightarrow \sin^2\left(\frac{2\pi}{\lambda} L\right) = 0 \Rightarrow \frac{2\pi}{\lambda} L = n\pi \Rightarrow kL = n\pi \Rightarrow \boxed{k_n = \frac{n\pi}{L}}$$

$$\text{Or } k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi f}{c} \Rightarrow f = \frac{kc}{2\pi} \Rightarrow \boxed{f_n = \frac{nc}{2L}}$$

$$\boxed{\lambda_n = \frac{2L}{n}}$$

$\Rightarrow$ fréquences de résonance = f des modes propres

$\Rightarrow$ ① il y a de λ ② il y a de mode propre pouvant entrer en résonance.

$\rightarrow$ Rmq noeud pour $\phi-\phi x = p\pi$
ventre pour $\phi-\phi x = (p+\frac{1}{2})\frac{\pi}{2} \Rightarrow A_{\text{ventre}} = \frac{(1+R)^2}{(1-R^2)^2 + 4R^2 \sin^2 \phi}$

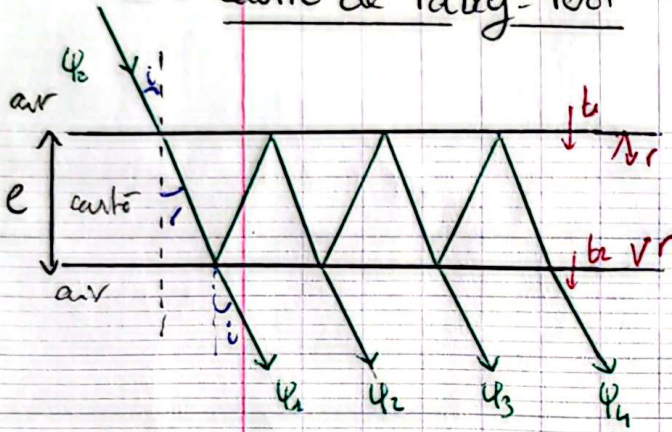
$\rightarrow$ Rmq On a négligé dissipation

↳ on cherche à maximiser les valeurs d'amplitude $\Rightarrow$ condition interférences constructives.

$\rightarrow$ Rmq Il y a toujours des noeuds et ventres ③ ou modes marqués
 $\Rightarrow$ pour avoir belle onde stationnaire il faut faire des réglages pour minimiser dénominateur.

$\rightarrow$ Rmq Similitude avec Fabry Perot.

2 - Cavité de Fabry-Pot XIXS $\rightarrow$ à mettre à ouverture - 8



$\rightarrow$ Constitué de 2 lames // séparées d'une distance e

La n multi-Michelson en lame d'air car les rayons font plusieurs allers-retours dans la cavité.

  chaque reflexion $\rightarrow$ décalage $\Rightarrow$ être ordres qui interf rent $\Rightarrow$  r solution des images $\Rightarrow$ miroirs très réfléchissants $\sim 95-99\%$
 $\Rightarrow$ interféromètre à n ordres

$\rightarrow$ Analogie avec corde de Helde:

- passage par envoi OET dans cavité
- onde subit reflexion successives de cavité

$\Delta ODE \neq$

$\hookrightarrow$ Helde nard et ventres visibles

$\hookrightarrow f \sim 10-100$ Hz

$\hookrightarrow$ FP pour $\lambda = 500$ nm $\Rightarrow f \sim 10^{14}$ Hz Mode n

si $e = 1$ mm $\Rightarrow$ mode 2000

Excitation pt vibrant f

Amplitude A

Reflexion aux bords $R = r^2$

Longueur cavité L

$\phi = 2kL$

Mode n

Rayonnement incident f

Champ électrique $\vec{E}$

Reflexion miroir $R = r^2$

 paisseur cavité e

$\phi = 2kne$

Ordre interférence p.

$\rightarrow$ Hyp: miroirs dans vide $\Rightarrow n=1 \Rightarrow$ déphasage entre deux rayons successifs:

$$\phi = \frac{2\pi}{\lambda} S = \frac{4\pi}{\lambda} e \cos i$$

$\rightarrow \psi_0 =$ amplitude d'onde incidente

$$\psi_1 = \psi_0 t_1 t_2$$

$$\psi_2 = \psi_0 t_1 t_2 r^2 e^{i\phi}$$

$$\psi_3 = \psi_0 t_1 t_2 (r^2)^2 e^{i2\phi}$$

$$\psi_4 = \psi_0 t_1 t_2 (r^2)^3 e^{i3\phi}$$

Avec $R = r^2 \equiv$ coeff reflexion en puissance

$T = t_1 t_2 \equiv$ coeff transmission en puissance

$$\Rightarrow \psi_e = \sum_{n=0}^{\infty} \psi_0 T (R e^{i\phi})^n$$

Sortie geo avec $R \ll 1 \Rightarrow \psi_e = \psi_0 \frac{T}{1 - R e^{i\phi}}$

$\Rightarrow$ Intensité en sortie de cavité

$$I_e = |\psi_e|^2 = I_0 \frac{T^2}{1 + R^2 - 2R \cos \phi}$$

avec $I_0 = |\psi_0|^2$

$\Rightarrow$ Transmittance de la cavité

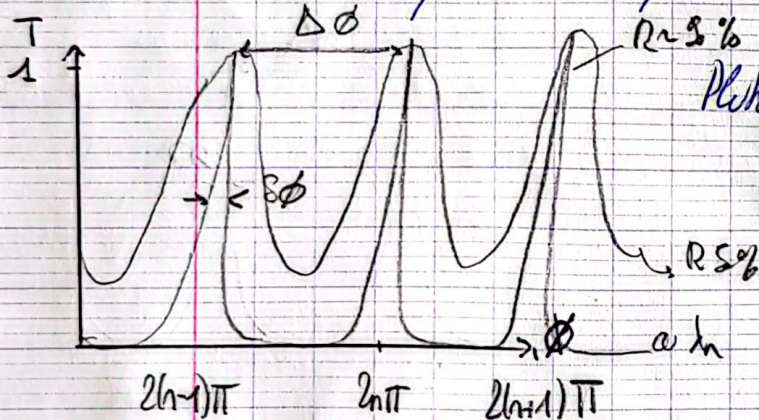
$$T = \frac{I_e}{I_0} = \frac{1}{1 + \underbrace{\frac{4R}{(1-R)^2}}_{\text{LM}} \sin^2(\phi/2)}$$

Resonance $\equiv$ max de puissance transférée entre rayon incident et rayon transmis (9)
 $\Rightarrow$ syst accumule E

Or $R \sim 95\% \Rightarrow n \gg 1 \Rightarrow$ max de transmission pour $\sin(\phi/2) = 0$
 $\Rightarrow \frac{\phi}{2} = n\pi \Rightarrow \frac{2\pi c}{\lambda} \text{ ecase} = n\pi$

$$\Rightarrow \boxed{\lambda_n = \frac{2 \text{ ecase}}{n}} \quad \text{or } c = \lambda \cdot f \Rightarrow \boxed{f = \frac{cn}{2 \text{ ecase}}}$$

$\Rightarrow$ En sortie, on obtient uniquement les pulsations résonantes de la cavité



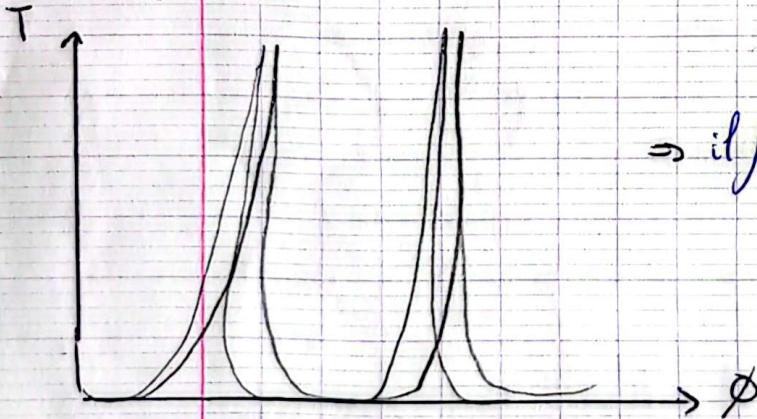
Plutôt que facteur qualité $Q \rightarrow$ finesse F

$$F = \frac{\Delta \phi}{\delta \phi} \rightarrow \begin{array}{l} \text{écart entre 2 pics} \\ \text{épaisseur à mi-hauteur} \end{array}$$

$$\boxed{F = \frac{\pi R}{1 - R}}$$

Pouvoir de résolution $\boxed{PR = \frac{\lambda}{\Delta \lambda}}$

$\Rightarrow$ Permet de séparer les raies du doublet du sodium



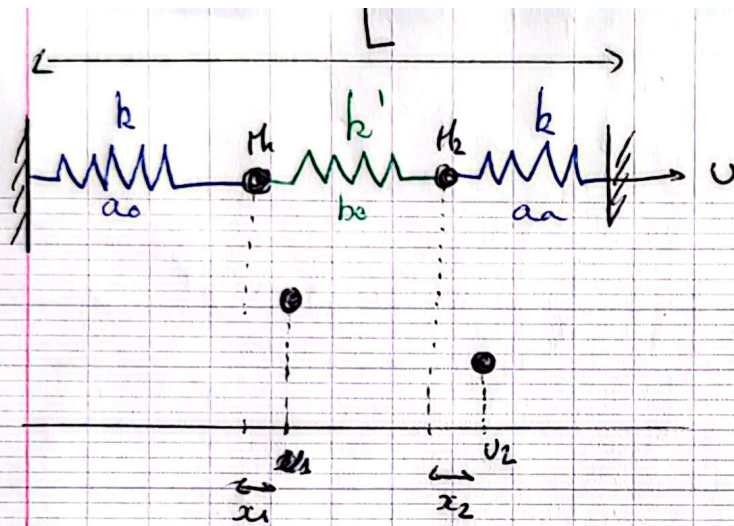
$\Rightarrow$ il faut avoir une bonne F pour pouvoir les distinguer.

Les utilises pour allonger les bras Michelson qui permettent de mesurer ondes gravitationnelles.

CONCLUSION

$\rightarrow$ Résonance $\equiv$ transfert max puissance entre excitateur et oscillateur
 $\rightarrow$ Absent de freq que de degré de liberté.

$\rightarrow$ Résonance Σ $\oplus$ grande s'amortissement faible
 $Q \rightarrow \infty \Rightarrow A \text{ diverge}$ et $f_r \rightarrow f_0$ du Σ non amorti



16

(H₁) $\vec{F}_1 = -k(x_1 - a_0)\vec{e}_x = -k x_1 \vec{e}_x$
 $\vec{F}_1' = -k'(x_2 - x_1 - b_0)\vec{e}_x = -k'(x_2 - x_1)\vec{e}_x$
 ↳ si $(x_2 - x_1) > b_0 \Rightarrow$ ressort allongé $\Rightarrow$ veut se rétracter $\Rightarrow +\vec{e}_x$
 si $(x_2 - x_1) < b_0 \Rightarrow$ ressort comprimé $\Rightarrow$ veut s'allonger $\Rightarrow -\vec{e}_x$

(H₂) $\vec{F}_2 = -k(L - x_2 - a_0)\vec{e}_x = -k x_2 \vec{e}_x$
 $\vec{F}_2' = -k'(x_2 - x_1 - b_0)\vec{e}_x = -k'(x_2 - x_1)\vec{e}_x$
 ↳ si $(x_2 - x_1) > b_0 \Rightarrow$ ressort allongé $\Rightarrow$ veut se comprimer $\Rightarrow -\vec{e}_x$
 si $(x_2 - x_1) < b_0 \Rightarrow$ ressort comprimé $\Rightarrow$ veut s'allonger $\Rightarrow +\vec{e}_x$

Mode propre = mode d'oscillation stationnaire et libre d'un Σ amorti

Mode résonant que pour Σ amorti, excité

Quand amortissement $\rightarrow 0 \Rightarrow$ mode res $\rightarrow$ mode propre.

$\omega_r \approx \omega_0$ du Σ non amorti

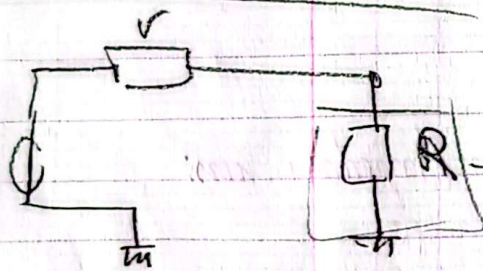
CS $\Rightarrow y(x, t) = A \cos(kx - \varphi) \cos(\omega t - \varphi)$

→ Trouver problématique simple par même approche.

Cas concret:

- ↳ structure métallique excitée
- ↳ machine à laser

+ expérience qualif, mettre corde de Helde
mais ressort simple en méca



→ problème d'adaptation d'impédance

~~dire qu'on cherche le cas~~ dire à quel niveau on voit le
résonance L1 pour L2 voir L3 pour Fabry Perot
↳ être + clair sur le niveau

RLC série est un oscillateur.

On a déjà vu RL → il se passe que si on regarde L
on a une fonction de transfert H → on a une Cas

Q = nbre oscillation avant qu'il n'y en ait plus filtre

$Q = \pi \frac{\langle E_{stockée} \rangle}{\langle E_{dissipée} \rangle \text{ pendant une période } T_0}$ → vue en transitoire

Utiliser du pour ressorter mécanique

Si Q grand $\Rightarrow U_{\text{max}} = \frac{2Q^2}{2Q} E \approx QE$

↳ facteur de
sur tension

↳ $Q \gg 1$ pour
avoir resonance
intéressante.

Si Q trop grand

↳ claquage du diélectrique
au niveau de ---

↳ ou le ---

Mode propre : étude ~~mesure~~ de mode d'oscillation

des $\neq$ parties du Σ à la même fréquence (f propre)
éventuellement déphasés les uns des autres.

on cherche des oscillations de la forme

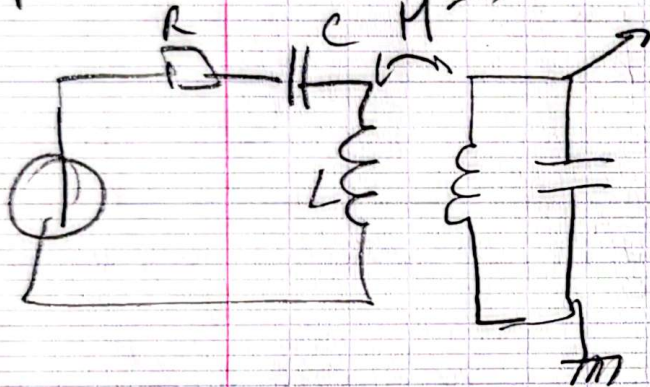
$$q_i(t) = A_i \cos(\omega t + \varphi_i) \quad i = 1, \dots, N$$

$$\text{La } q_i = \underline{A_i} e^{j\omega t} \quad \text{avec } \underline{A_i} = A_i e^{i\varphi_i}$$

OPPH = mode propre d'1 onde dans un milieu continu

Force accorde à rendre à position eq

Eq élec à 2 DL $\rightarrow$ revient à jouer sur k'



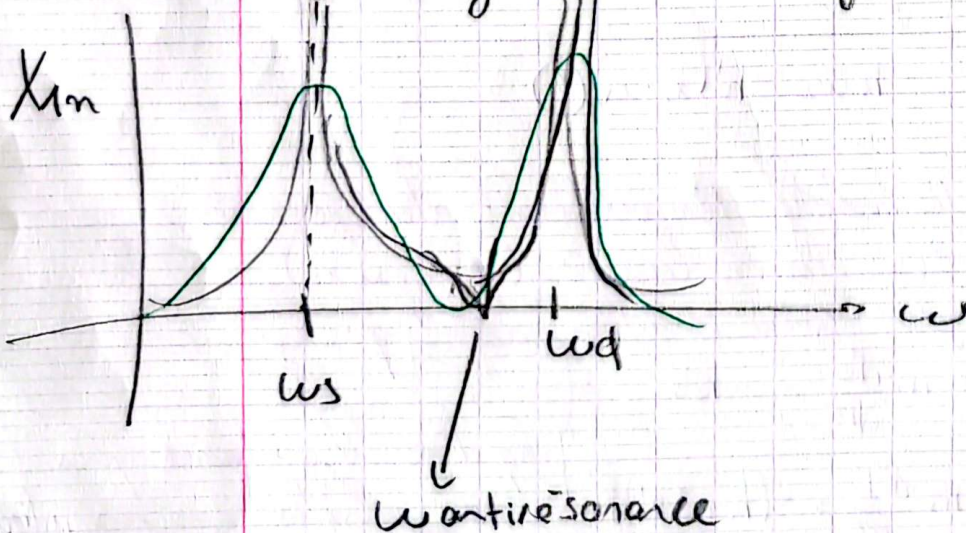
$\Rightarrow$ 2 freq resonances
~~but resonance~~

$$X_m = \left| \frac{1}{C} \right|$$

$$\rightarrow (2k+k') - m\omega^2)(k - m\omega^2)$$

$$= \left(\frac{2k+k'}{m} - \omega^2 \right) \left(\frac{k}{m} - \omega^2 \right)$$

divergence car pas d'amortissement



Si dissipation : $\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = -\gamma \frac{\partial \psi}{\partial t}$

On cherche des sol aux modes propres

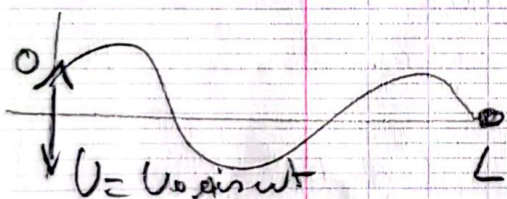
$\hookrightarrow \psi = A e^{i(\omega t - kx)} = (A e^{-ikx}) e^{i\omega t}$
 $\hookrightarrow$ mode propre

$\left(-\frac{\omega^2}{c^2} + k^2 \right) \psi = -j\gamma \omega \psi$

$\hookrightarrow k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - j\omega\gamma \Rightarrow k = k' + jk''$

~~Pour ne pas dissiper~~ Pour négliger dissipation $k'' \ll k'$

$\psi = A e^{-k''x} e^{i(\omega t - k'x)}$



On cherche les conditions sur A et ϕ

$\hookrightarrow$ compte tenu des CL

CS $\Rightarrow \psi(x, t) = A \sin(\omega t) \sin(kx + \phi)$

$\psi(x=0, t) = U_0 \sin \omega t = A \sin \omega t \sin \phi \Rightarrow A \sin \phi = U_0 \quad \forall t$

$\psi(x=L, t) = 0 = A \sin \omega t \sin(kL + \phi) \quad \forall t$

$\hookrightarrow kL + \phi = n\pi \Rightarrow \phi = n\pi - kL$

$\Rightarrow A \frac{U_0}{\sin \phi} = \frac{U_0}{\sin(n\pi - kL)} = \frac{U_0}{\sin(n\pi - \frac{\omega L}{c})}$

$\Rightarrow A \rightarrow +\infty$ lorsque $\sin(n\pi - \frac{2\pi f L}{c}) = 0 \Rightarrow \frac{2\pi f L}{c} = n\pi$
 $\hookrightarrow f_n = \frac{nc}{2L}$

Phénomènes de résonance dans différents domaines de la physique.

Prérequis:

Condensateur $\rightarrow$ Amplitude $\rightarrow$ si on pousse à la barre J.
Inducteur $\rightarrow$ à la balance $\rightarrow$ oscillateur pendule $\rightarrow$ passe par période en forçage $\rightarrow$ communiqué E

FD conducteur puissance

INTRODUCTION

Résonance: quand le système "absorbe" un maximum d'énergie en réponse à son excitation.
- transfert E moyenne maximal entre excitateur et oscillateur.

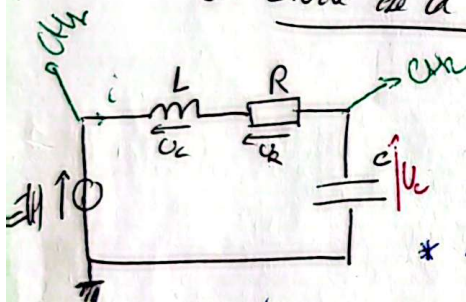
slide labor d
résonance I

I - Etude d'un système à 1 degré de liberté: le RLC

Syst linéaire
Excitation sinusoïdale

Low
indép R

1. Etude de la réponse en régime



Bobine & R inerte $\rightarrow$ à HF effet capa $\rightarrow$ effet inductif
 $\Rightarrow$ manip à BF

(L, C)

* Loi des mailles: $e(t) = u_L + u_R + u_C = L \frac{di}{dt} + Ri + u_C$

$$\text{Or } i = C \frac{du_C}{dt} \Rightarrow e(t) = E \cos(\omega t) \Rightarrow \boxed{\frac{d^2 u_C}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{du_C}{dt} + \frac{1}{LC} u_C = E \cos(\omega t)}$$

* Au régime sinusoïdal forcé avec E car ici pta
diviseur de tension: $u_C = \frac{Z_C}{Z_C + Z_R + Z_L} E$
part var résonance

Equa diff 2nd ordre

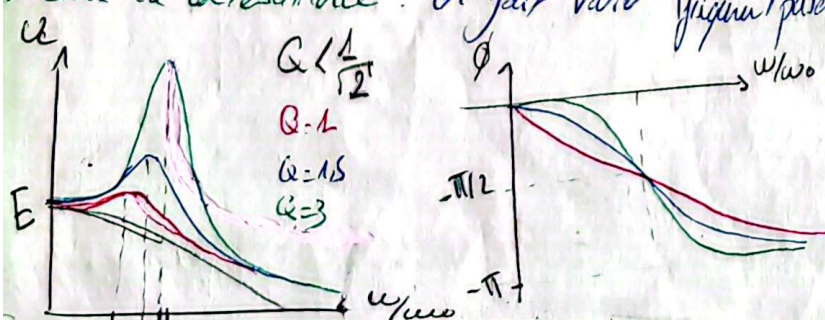
- sol homogène = régime transitoire
- sol particulière = permanent

avec $Z_C = \frac{1}{j\omega C}$, $Z_L = j\omega L$, $Z_R = R \Rightarrow \boxed{u_C = \frac{E}{1 - LC\omega^2 + jRL\omega}}$

* On pose: la pulsation propre du circuit $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$
le facteur de qualité $Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$

* Amplitude: $u_C = \frac{E}{\sqrt{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + \left(\frac{\omega}{\omega_0} \frac{1}{Q}\right)^2}}$
* Phase: $\phi = -\frac{\pi}{2} + \arctan \left(\frac{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}{\frac{\omega}{\omega_0} \frac{1}{Q}} \right)$

* Etude de la résonance: on fait varier (fréquence) pulsation ω d'excitation et on étudie u_C et ϕ



$$\left(\begin{array}{l} \lim_{\omega \rightarrow 0} \phi = 0 \\ \lim_{\omega \rightarrow \infty} \phi = -\pi \end{array} \right)$$

On pose $x = \frac{\omega}{\omega_0} \Rightarrow U_c = \frac{E}{\sqrt{f(x)}}$ avec $f(x) = (1-x^2)^2 + (\frac{x}{Q})^2 \Rightarrow U_c \propto \frac{1}{\sqrt{f(x)}}$

$$f'(x) = \ln x \left(x^2 - 1 + \frac{1}{2Q^2} \right) = 0$$

$\rightarrow x=0 \rightarrow$ pas de résonance car $f(x) \rightarrow \infty \Rightarrow U_c \rightarrow 0$
 $\rightarrow x = \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}} \Rightarrow \boxed{Q > \frac{1}{\sqrt{2}}} \Rightarrow$ résonance en tension
 $U_{c \max} > E \Rightarrow$ surtension

* Bilan:

- $\rightarrow$ Résonance aux bornes du condensateur si $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$
 - d'autant @ angée (pic étroit) que Q grand $\rightarrow$ petite bande passante.
 - @ Q est grand, $\omega_r \rightarrow \omega_0$ ($\omega_r < \omega_0$)
 - surtension $\rightarrow$ qd $Q \uparrow$
- $\rightarrow$ Si $Q < \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow U_{c \max} = E$ que pour $x=0$
- $\rightarrow \phi \in [0; -\pi)$ et résonance à $-\pi/2$

[Par l'intensité on regarde U_R , f.p. résonance $\forall Q / \omega = \omega_0$ et $\frac{E}{R} = U_R$]

2. Etude énergétique

Puissance totale dans circuit $P_G = eI(t) = R i^2 + \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} L i^2 \right) + \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} C u^2 \right)$

$\Rightarrow$ Puissance électrique fournie par générateur P_G est dissipée par effet Joule dans la résistance et fait varier E et E_R emmagasinée ds circuit.

[Départ $E_{\text{élec}}$ stockée ds C qui se décharge et E_{mag} se stocke ds bobine.
 Puis se recharge $\Rightarrow$ sin courant change par recharge $C \rightarrow$ phénomène d'oscillation]

Mais ici régime sinusoïdal forcé $\Rightarrow \langle P_G \rangle = \langle P_R \rangle \Rightarrow$ toute puissance fournie dissipée par effet Joule

Or $\langle P_R \rangle = \langle R I^2 \rangle$ avec $I = \frac{E/R}{\sqrt{1 + Q^2(x - \frac{1}{x})^2}} \rightarrow$ si étude résonance I

$\Rightarrow \langle P_G \rangle = \frac{E^2}{2R} \cdot \frac{1}{1 + Q^2(x - \frac{1}{x})^2} \Rightarrow$ Maximum en puissance fournie pour $x=1 \Rightarrow \omega = \omega_0$
 $\hookrightarrow$ résonance

$\rightarrow$ Slide schéma de l'p18

$\rightarrow$ Application : oscillateur à quartz

Usat pour l'énergie