

L20: Diffraction par des structures périodiques ①

PREREQUIS: - Interférences à 2 ordres
- Diffraction de Fraunhofer
- Cristallographie.

12

INTRODUCTION

Cette leçon est à la suite de Interférences à 2 ordres et de la Diffraction de Fraunhofer → par 1 fente ou divers objets simples

↳ Que se passe-t-il si on a une série de fentes?

Exemple CD → on voit irrisation.

⇒ Irisation (décomposition du spectre) de la lumière incidente → la lumière est diffractée par les sillons (cristaux) gravés sur le CD.

L'ensemble de ces sillons de largeur d'ordre de demi-micron forme un réseau de diffraction, c'est une structure périodique qui diffracte la lumière.

⇒ Structure périodique permet d'obtenir le spectre de la lumière incidente.
Diffraction par ⇒ 2 applications majeures

* Spectroscopie: étude du spectre obtenu par diffraction d'une structure parfaitement connue ⇒ on peut remonter aux propriétés de la lumière incidente et de sa source.

* Si on raisonne dans l'autre sens: on connaît parfaitement la lumière incidente et son spectre ⇒ étude rigoureuse de diffraction permet de remonter aux propriétés de la structure diffractante. Si l'objet étudié est un cristal ⇒ cristallographie.

Avant d'étudier les applications de la diffraction par structure périodique, étudions le physique dans le cas simple: le réseau plan unidimensionnel.

I. Réseaux plans unidimensionnels

1. Généralités

* Réseau de diffraction: toute structure périodique qui peut diffractionner une onde lumineuse ou ET .

* Réseau à 1D: structure plane dont le coeff de réflexion/transmission est périodique dans une direction.

3 types de réseaux: - transmission ou réflexion
- de phase ou d'amplitude.

Ici on va s'intéresser aux réseaux d'amplitude par transmission.

Fabrication: → réseau de fentes

→ en verre où on a collé un métal rayé périodiquement (avec pointes de diamant) → alternance de transmission et réflexion.

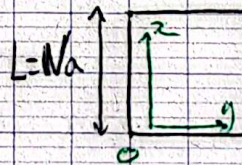
Grandeurs pertinentes

- L : longueur éclairée du réseau $\approx 3 \text{ cm}$

- N. nbre de fentes éclairées $\approx 10 - 1000$

- a : pas du réseau $\approx 1 - 10 \mu\text{m}$

- n: nbre de traits par unité de longueur: $n = \frac{N}{L} = \frac{1}{a} \approx 50 - 600 \text{ traits/mm}$

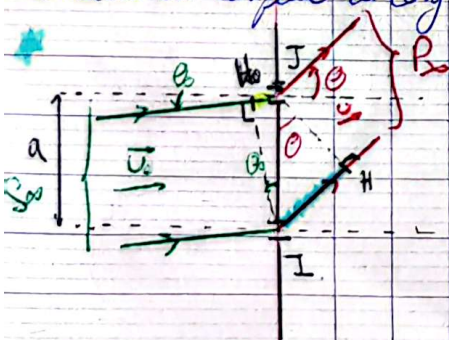


→ let transmission
 $t(x+a) = t(x)$

2. Formule des réseaux

N fentes // $\Rightarrow$ 2 sources secondaires ponctuelles

Le réseau est composé de long traits $\Rightarrow$ diffraction à peu près uniquement sur la largeur.



$$IJ = a$$

S et P à ∞ rayons

$$S = (SIHP) - (SHJP) \\ = (IH) - (HJ)$$

S et P à ∞

$$\text{or dans airy } n \approx 1 \Rightarrow \boxed{S = IH - HJ = a(\sin \theta_1 - \sin \theta_0)}$$

→ déphasage $\phi = \frac{2\pi}{\lambda} a (\sin \theta - \sin \theta_0)$

Or max d'intensité $\Leftrightarrow$ interférences constructives entre toutes les ondes diffractées
 $\Leftrightarrow$ onde en phase en P

$\Leftrightarrow \phi = p \cdot 2\pi$ avec $p \in \mathbb{Z}$ $p =$ ordre
 $\Leftrightarrow \frac{2\pi}{\lambda} a (\sin \theta - \sin \theta_0) = p \cdot 2\pi$

→ $\sin \theta - \sin \theta_0 = \frac{p \lambda}{a}$ Formule des réseaux (critère de Bragg pour avoir des interférences constructives)

Rmq: angle de déviation θ avec l'axe (on separe θ en λ dans les ordres sup)

Rmq: cette condition impose une limitation des ordres disponibles.

ex: incidence normale $\Rightarrow \sin \theta_0 = 0 \Rightarrow \sin \theta = \frac{p \lambda}{a}$

or $-1 < \sin \theta < 1 \Rightarrow |p| < \frac{a}{\lambda} = \frac{1}{\lambda n}$

ODG: $\lambda = 500 \text{ nm}$ et $n = 500 \text{ trait/mm}$ $p < \frac{1}{500 \cdot 10^3 \cdot 500 \cdot 10^{-9}} = 4$

Rmq: formule dépend de $\lambda \Rightarrow$ réseau separe les λ

$\lambda_r > \lambda_b \Rightarrow$ incidence normale $\Rightarrow \sin \theta_r > \sin \theta_b \Rightarrow \theta_r > \theta_b$
 $\Rightarrow$ Le rouge est plus dispersé que le bleu.

Expe qual: Avec lampe Hg + filtres interférentiel vert $\Rightarrow$ on voit les 4 ordres

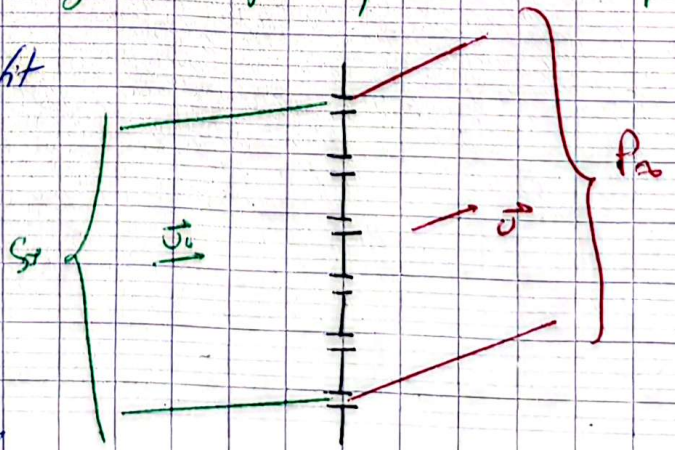
- on change réseau $\Rightarrow a \Rightarrow$ on voit $\oplus$ ou $\ominus$ d'ordre.
- on enlève filtres $\Rightarrow$ on voit phénomène d'angle: toutes les couleurs de la lampe ϕ diffracté avec m angle $\Rightarrow$ rouge $\oplus$ dispersé que bleu (inverse prism)

Rmq: $\oplus$ le pas est grand $\Rightarrow$ plus angle petit

3 - Intensité diffractée.

Les $\neq$ sources diffractées sont issues d'une source ponctuelle monochromatique $\Rightarrow$ elles sont cohérentes entre elles:

$\Rightarrow$ on somme les éclairement/amplitudes



Ordre 0: $U_0 = A_0$

1. $\psi_1 = A_0 e^{i\varphi}$

2. $\psi_2 = A_0 e^{2i\varphi}$

$\vdots$
n. $\psi_n = A_0 e^{ni\varphi}$

Avec φ : déphasage entre 2 rayons successifs

Au point P: $\psi_P = \sum_{i=0}^{N-1} A_0 e^{ni\varphi} = A_0 \sum_{i=0}^{N-1} (e^{i\varphi})^n$

On reconnaît une série géométrique de raison r

$$\Rightarrow \psi(P) = A_0 \frac{1 - e^{iN\varphi}}{1 - e^{i\varphi}} = A_0 \frac{e^{i\frac{N\varphi}{2}} (e^{-i\frac{N\varphi}{2}} - e^{i\frac{N\varphi}{2}})}{e^{i\frac{\varphi}{2}} (e^{-i\frac{\varphi}{2}} - e^{i\frac{\varphi}{2}})} = A_0 e^{i(N-1)\frac{\varphi}{2}} \frac{\sin(N\varphi/2)}{\sin(\varphi/2)}$$

Or la distribution en intensité $I \propto |\psi|^2$

$\Rightarrow$ Intensité au point P $I(\theta) = I_0 \frac{\sin^2(N\varphi/2)}{\sin^2(\varphi/2)}$

$\swarrow$ Règne lié aux interférences

avec $I_0 = |\psi|^2$: intensité diffractée par 1 fente

* En incidence normale $\varphi = \frac{2\pi a}{\lambda} \sin \theta \Rightarrow$

$$I(\theta) = I_0 \frac{\sin^2\left(\frac{Na}{\lambda} \sin \theta\right)}{\sin^2\left(\frac{\pi a}{\lambda} \sin \theta\right)}$$

$\Rightarrow$ $R(\theta)$ max pour $\frac{\pi a}{\lambda} \sin \theta = p\pi$

$$\sin \theta = \frac{\lambda p}{a}$$

$\Rightarrow$ $R(\theta) = 0$ pour $\frac{Na}{\lambda} \sin \theta = p\pi$

$$\sin \theta = \frac{\lambda p}{Na}$$

* Max si pas incidence normale $\Rightarrow \frac{\pi a}{\lambda} (\sin \theta - \sin \theta_0) = p\pi \Rightarrow \sin \theta = \frac{\lambda}{a} \sin \theta_0 + p$

* Correspondance entre paramètres du réseau et figure de diffraction

- distance entre 2 trous $a \leftrightarrow$ distance entre 2 pics $\frac{1}{a}$

- taille du réseau $Na \leftrightarrow$ largeur d'un pic $\propto \frac{1}{Na}$ $\rightarrow \oplus Na$ est grand $\oplus$ pic fin

- largeur des fentes $b \leftrightarrow$ taille de la figure $\propto b$ $\rightarrow$ car fente ϕ so figure

$\hookrightarrow$ on retrouve l'enveloppe du sinus cardinal de la diffraction.

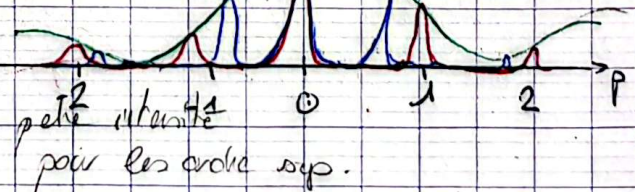
$\hookrightarrow$ cache des I_0

* Cade: Montrer figure intensité

$\rightarrow$ influence de $N \rightarrow$ largeur pic

$\rightarrow a \rightarrow$ distance entre pics

$\rightarrow \lambda \rightarrow$ position pic



II - Spectromètre à réseau

Avec formule du réseau on a vu que l'angle de diffraction dépend de λ .
 Donc si on connaît toutes les caractéristiques du réseau diffractant $\Rightarrow$ on peut déterminer les λ du rayonnement en étudiant la figure de diffraction.
 $\Rightarrow$ Principe du spectromètre à réseau.

1 - Dispersion

Différences avec le prisme:

* prisme a 1 seule réfraction alors que le réseau a p ordres

* prisme relation d'incidence entre angle de déviation et λ car loi de Cauchy $n(\lambda) = A + \frac{B}{\lambda^2} \Rightarrow n(\lambda_{bleu}) > n(\lambda_{rouge}) \Rightarrow$ bleu $\odot$ dévié

pour réseau $\sin \theta = \sin \theta_0 + \frac{p\lambda}{a}$ $\Rightarrow$ relation linéaire entre θ et λ
 par la première p (car $\theta \approx 0$) $\Rightarrow$ pour 1^{er} ordre dévié rouge plus dévié que bleu.

De plus θ_0 et a étant fixe, pour un ordre p donné, si λ varie de $d\lambda$, alors θ varie de $d\theta \Rightarrow \cos \theta d\theta = \frac{p}{a} d\lambda$

$$\Rightarrow D = \frac{d\theta}{d\lambda} = \frac{p}{a \cos \theta} \quad \text{Pouvoir dispersif}$$

Remq: si petit angle $\Rightarrow D = \frac{p}{a} = \cot \Rightarrow$ déviation proportionnelle à λ
 $\Rightarrow$ spectre normal

Remq: - p $\uparrow \Rightarrow D \uparrow$

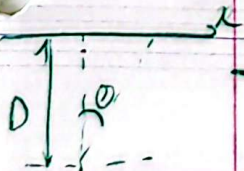
- a $\uparrow \Rightarrow n \downarrow \Rightarrow D \downarrow$

$\Rightarrow$ On utilise lentille dans montage on caractérise spectromètre rétrograde.

Exemple: On trace droite d'allumage $x = f(\lambda)$ pour lampe Hg

- On prend lampe A-Hg $\Rightarrow$ nouvelle raie

On relie sa position $\Rightarrow$ on détermine λ grâce à la droite.



- incidence normale $\sin \theta = \frac{p\lambda}{a} = \frac{x}{D} \Rightarrow \left(x = \frac{pD}{a} \lambda \right)$
 $\Rightarrow \alpha_{\text{ray}} = \frac{pD}{a} \Rightarrow n = \frac{1}{a} = \frac{\alpha_{\text{ray}}}{pD}$

2. Pouvoir de résolution

ou séparer

On suppose 1 fente $\rightarrow$ fine $\Rightarrow$ seule limite due à la diffraction

Or critère de Rayleigh : pour pouvoir séparer 2 tâches de diffraction (ici 2 signaux qui n'interfèrent pas) il faut que le max de l'un corresponde, au plus proche, au min de l'autre.

On définit le pouvoir de résolution $PR = \frac{\lambda}{\Delta\lambda}$ comme le $\rightarrow$ petit écart de λ et $\lambda + \Delta\lambda$ tel que λ et $\lambda + \Delta\lambda$ sont mesurable au spectre

* Max du pic principal ordre p pour $\sin \theta_p = \sin \theta_0 + p \frac{\lambda}{a}$
 $\Rightarrow$ première annulation amplitude correspond à
 $\sin(\theta_p + \epsilon) \approx \sin \theta_p \pm \frac{\lambda}{aN}$

$\Rightarrow$ Écart entre le max et premier min $|S_1(\sin \theta_p)| = \frac{\lambda}{aN}$

* $\sin \theta_p(\lambda + \Delta\lambda) = \sin \theta_0 + p \frac{\lambda + \Delta\lambda}{a} \Rightarrow$ pour 1 ordre p , écart entre les max de λ et $\lambda + \Delta\lambda$

$$\hookrightarrow |S_2(\sin \theta_p)| = p \frac{\lambda + \Delta\lambda}{a} + \sin \theta_0 - p \frac{\lambda}{a} - \sin \theta_0 = \frac{p \Delta\lambda}{a}$$

* En comparant tout possible, les raies λ et $\lambda + \Delta\lambda$ sont séparées si

$$|S_2(\sin \theta_p)| > |S_1(\sin \theta_p)| \Rightarrow \frac{p \Delta\lambda}{a} > \frac{\lambda}{aN} \Leftrightarrow \frac{\lambda}{\Delta\lambda} > pN$$

$$\Rightarrow \boxed{PR = \frac{\lambda}{\Delta\lambda_{\min}} = pN} \Rightarrow \theta_p \nearrow \Rightarrow PR \nearrow$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{CDG: Ordre } p=1 \\ L=20\text{cm} \\ n=500 \text{ traits/mm} \end{array} \right\} N=10^4 \Rightarrow PR=10^4 \Rightarrow \Delta\lambda_{\min} = \frac{\lambda}{PR} = \frac{1}{10^4} = 0,0001 \text{ nm}$$

Par Sodium $\lambda = 589 \text{ nm}$

Or $\lambda_{\text{Sodium}} = 589 \text{ nm} = 5,89 \cdot 10^{-7} \text{ m} = 0,589 \text{ nm} \Rightarrow$ on peut distinguer les raies du doublet de Sodium.

Haute résolution $\Rightarrow$ bonne que théorique car on a séparé forte de fine $\Rightarrow$ proportionnel pas de lumière

Or Σ réel, forte de taille fine $\Rightarrow$ PR $\Rightarrow$ (mais quand m même que prisme).

3. Limitations réelles.

$\rightarrow$ En pratique, si on met trop dans les ordres d'interférences, on peut observer un recouvrement de spectre $\Rightarrow C_{p1}^{bleu} < C_{p2}^{rouge} \Rightarrow$ des ordres 3 (voire 2)

$\rightarrow$ Avec interférences + diffraction $\Rightarrow$ max luminosité dans ordre 0 $\rightarrow$ pas intéressant car pas de décomposition du spectre.

On marque de luminosité dans ordres d'interet ($p \neq 0$) $\Rightarrow$ utilisation de réseaux blazes = suite de marches dont angle définit angle de luminosité max.

Cet angle est ajustable $\Rightarrow$ on peut diriger lumière dans 1 ordre supérieur $\Rightarrow$ PR meilleur.

III. Diffraction des rayons X par une structure cristalline.

Maintenant, en étudiant une figure de diffraction en connaissant parfaitement la lumière incidente on peut obtenir des infos sur le réseau diffractant $\Rightarrow$ méthode pour sonder la matière cristalline.

1. Position du problème et réseau de Bravais

* Cristal: Solide dans lequel les atomes sont ordonnés de façon périodique dans les 3 dimensions de l'espace.

* Réseau de Bravais: ensemble infini de points discrets avec un arrangement et une orientation qui apparaît exactement la même lorsqu'on est vu d'un point de vue quelconque.

- si tridimensionnel $\equiv$ ensemble de points auxquels on associe un vecteur position $\vec{R} = n_1 \vec{a}_1 + n_2 \vec{a}_2 + n_3 \vec{a}_3$

$n_i \in \mathbb{N}$

$\vec{a}_i$ = vecteurs primitifs qui engendrent le réseau $\hookrightarrow$ tous au même plan.

comment se repère le motif

$\rightarrow$ en abaque simple

On définit les plans réticulaires: c'est tout plan contenant au ≥ 3 points non alignés du réseau de Bravais.

$\Rightarrow$ ensemble de plans réticulaires //, équidistants et qui contiennent dans leur ensemble tous les points de Bravais du réseau tridimensionnel = famille de plans réticulaires

$\Rightarrow \exists \neq$ façon de décomposer cristal en plans $\Rightarrow \exists \neq$ familles pour décrire le cristal.

Pour avoir une figure de diffraction il faut λ comparable avec $\sim$ qqs Å $\Rightarrow \lambda \sim 10^{-10}$ m

$$\Rightarrow \left[v = \frac{c}{\lambda} = \frac{10^8}{10^{-10}} = 10^{18} \text{ Hz} = \text{Rayons X} \right]$$

2. Formulation de Bragg, il suppose que

1 $\rightarrow$ les rayons X incidents se réfléchissent $\hat{c}$ dans un miroir sur les plans réticulaires $\Rightarrow$ angle incidence = angle de réflexion

2 $\rightarrow$ les rayons réfléchis par plans successifs interfèrent de manière constructive $\Rightarrow \varphi = n2\pi$ ($\neq$ entre 2 rayons successifs) $n \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow \frac{2\pi}{\lambda} s = n2\pi \quad \text{or } s = 2d \sin \theta$$

$\Rightarrow \boxed{n\lambda = 2d \sin \theta}$ Condition de Bragg avec n ordre de réflexion.

(1)+(2) $\Rightarrow$ observations de pics intenses de rayons diffractés = pics de Bragg.

3. Application $\rightarrow$ la caractérisation d'une maille cristalline.

* Connaissant λ et $\theta \Rightarrow$ on peut remonter à d .

* Or $\exists \neq$ façon de décomposer le cristal en plans $\Rightarrow \neq$ familles de plans réticulaires $\Rightarrow \neq d$
 $\Rightarrow$ en changeant l'orientat° du cristal (et donc θ) on va obtenir l'info sur $\neq d$
 $\Rightarrow$ obtient $\neq$ pics de Bragg en fct de $\theta \Rightarrow$ on peut remonter à la structure du cristal.

CONCLUSION $\rightarrow$ Diffraction peut être un phénomène unidirectionnel (Rayleigh)

$\rightarrow$ Mais par structure périodique, elle peut être chéle $\hat{c}$ on l'a vu avec les 2 appels car à partir de la figure de diffraction on peut obtenir des infos sur la source ou l'objet diffractant