

L1h: Ondes acoustiques

(12)

PREREQUIS:

- Thermodynamique
- Diffusion thermique / phénomènes de transport
- P des ondes (eq d'onde, eq d'Hamilton, relation dispersion)
- EM
- Méca flu

INTRODUCTION

Que se passe-t-il quand on parle et quand on entend ?

On ne connaît que le son et le $\leftrightarrow$ à une vibration mécanique (on met la main sur la gorge) en observant le fonctionnement d'un haut-parleur.

On a une membrane qui se déplace dans un fluide. Ce déplacement doit être rapide par rapport au fluide simplement autour de la membrane.

Un fluide : milieu élastique $\Rightarrow$ le volume / masse volumique des particules de fluide au voisinage de la membrane $\Rightarrow$ variation de pression $\Rightarrow$ mise en mouvement des particules de fluide voisines $\Rightarrow$ variation de volume et pression de particules voisines et etc $\Rightarrow$ c'est la propagation de la perturbation de proche en proche $\Rightarrow$ ondes acoustiques (sonore, audible, infrason, ultrason) } on diff. onde EM et lumineuse.

* Propagation des ondes sonores : couplage entre variation de pression et déplacement particules de fluide (c'est interne des particules).

* Ondes longitudinales : mouvement des particules selon la direction de propagation.

* Nécessité d'un milieu matériel

I - Modèle des ondes acoustiques.

1 - Approximation acoustique.

Soit un fluide au repos caractérisé par :

- pression uniforme p_0
- masse volumique uniforme ρ_0
- vitesse particulière nulle

Onde sonore = perturbation par rapport à cet état d'équilibre.

→ pression acoustique / surpression

⇒ Etat du fluide décrit par:

- pression: $P(M,t) = P_0 + p_a(M,t)$ avec $|p_a(M,t)| \ll P_0$
- masse volumique: $\rho(M,t) = \rho_0 + \rho_a(M,t)$ avec $|\rho_a(M,t)| \ll \rho_0$
- vitesse particulière: $\vec{U}(M,t) = \vec{0} + \vec{u}_a(M,t)$ avec $\|\vec{u}_a(M,t)\| \ll V_0$
à déterminer et ad

Hypothèses:

- On néglige l'effet de la pesanteur (ρ, P_0 constante)
- Écoulement parfait: $\Rightarrow$ phénomènes dissipatifs négligés
 - ϕ de viscosité
 - transformation isentropique (adiabatique réversible) des particules fluides.
- Approximation acoustique: $\vec{U}, p_a$ et ρ_a sont des $\propto$ petits d'ordre 1
 - $\Rightarrow$ néglige tout terme d'ordre 2 et plus.
 - $\Rightarrow$ étude faite à l'ordre 1.

2. Mise en équations

Pour étudier la propagation des ondes acoustiques il faut caractériser P, ρ et $\vec{U}$
 $\Rightarrow$ il faut 3 équations.

* Équation locale de conservation de la masse: $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{U}) = 0$

$$\Rightarrow \frac{\partial (\rho_0 + \rho_a)}{\partial t} + \text{div}((\rho_0 + \rho_a) \vec{U}) = 0 \quad \begin{matrix} \nearrow \propto \text{ordre 2} \\ \text{Linearisation.} \end{matrix}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial \rho_a}{\partial t} + \rho_0 \text{div} \vec{U} = 0} \quad (1)$$

* Équation d'Euler (on néglige la pesanteur) $\rho \left(\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + (\vec{U} \cdot \text{grad}) \vec{U} \right) = -\text{grad} P$ ~~$+\rho \vec{g}$~~

↳ pas linéaire à cause du terme de convection, mais ordre 2 $\Rightarrow$ négligé

ODE: $\left\| \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} \right\| \sim \frac{U}{T}$ et $\|(\vec{U} \cdot \text{grad}) \vec{U}\| \sim \frac{U^2}{L}$ avec $\begin{matrix} T: \text{dérivée} \\ L: \text{distance} \end{matrix}$ (caractéristique de l'onde)
 $\Rightarrow \frac{\|(\vec{U} \cdot \text{grad}) \vec{U}\|}{\left\| \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} \right\|} \sim \frac{U^2}{L} \cdot \frac{T}{U} = \frac{U}{L/T} \ll 1$ $\hookrightarrow$ pour pouvoir négliger.
 U: ODE vitesse particulière

Or $\frac{L}{\tau} = c$ (célérité ondes acoustique dans le milieu) $\Rightarrow c \ll c_0$
 $\Rightarrow$ Approximation acoustique ok ssi $\frac{\|\vec{u}\|}{c} \ll 1$

ordre 2
 $\Rightarrow (\rho_0 + \rho_1) \frac{\partial \vec{\sigma}}{\partial t} = -\text{grad}(\rho_0 + \rho_1) \Rightarrow \boxed{\rho_0 \frac{\partial \vec{\sigma}}{\partial t} = -\text{grad} \rho_1} \quad (2)$

On a 5 inconnues $(\rho_1, p_1, \vec{\sigma})$ et 4 eq scalaire $\Rightarrow$ manque 1 eq

* Equation thermodynamique pour relier p_1 et ρ_1 .
 fluide = Σ étatant $\Rightarrow p = p(S, P)$

$\Rightarrow dp = \left. \frac{\partial p}{\partial P} \right|_S dP + \left. \frac{\partial p}{\partial S} \right|_P dS$
 $\Rightarrow$ ou transformation isothermique

$\Rightarrow p - p_0 = \left. \frac{\partial p}{\partial P} \right|_S (P - P_0)$

$\Rightarrow \boxed{p_1 = p_0 \chi_s p_1} \quad (3)$

On pose $\chi_s = \frac{1}{p_0} \left. \frac{\partial p}{\partial P} \right|_S$

Coeff compressibilité isothermique

II. Equations de propagation

1. Equations de propagation

* (1) + (3) $\Rightarrow \rho_0 \chi_s \frac{\partial p_1}{\partial t} + \rho_0 \text{div} \vec{\sigma} = 0 \Rightarrow \boxed{\chi_s \frac{\partial p_1}{\partial t} + \text{div} \vec{\sigma} = 0} \quad (4)$

* (2) et (4) Relient les variations spatiales et temporelles de $\vec{\sigma}$ et p_1
 $\Rightarrow$ couplage entre $\vec{\sigma}$ et p_1 responsable de la propagation de l'onde

$\frac{\partial (4)}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} (\text{div} \vec{\sigma}) = -\chi_s \frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2}$

$\text{div} (2) \Rightarrow \rho_0 \frac{\partial}{\partial t} (\text{div} \vec{\sigma}) = -\Delta p_1$

$\Delta p_1 - \rho_0 \chi_s \frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2} = 0$

(célérité de l'onde)

$\Rightarrow \boxed{\Delta p_1 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2} = 0}$ avec $\boxed{c = \frac{1}{\rho_0 \chi_s}}$

Equation de d'Alembert à 3 dimensions.

Pour la vitesse

$$\Delta \vec{v} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial t^2} = 0$$

2. Célérité

* Cas général $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$ $[\epsilon_0] = \text{kg} \cdot \text{m}^{-3} \cdot \text{s}^2$ $[\mu_0] = \text{kg}^{-1} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$

* GP diatomique : transfo adiabatique réversible $\Rightarrow$ loi de Laplace $PV^\gamma = \text{cst}$

Or GP $\Rightarrow PV = nRT = \frac{m}{M} RT$ et $\gamma = \frac{m}{V} = \frac{PM}{RT}$

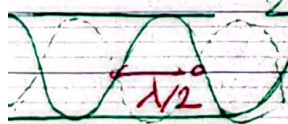
$$\Rightarrow P \gamma^{-\gamma} = \text{cst} \Rightarrow \ln P - \gamma \ln V = \text{cst} \Rightarrow \frac{\partial P}{P} - \gamma \frac{\partial V}{V} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial P}{\partial V} = \gamma \frac{P}{V} = \frac{1}{X_{sp}} = c^2 \Rightarrow c = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}}$$

Expe géant : tube de Kundt 2 options.

1. on fait varier T et on calcule c $\Rightarrow$ on retrocure pour

2. A T fixée on mesure λ pour remonter à c.



$c = \lambda f$ on connaît f on mesure λ = distance entre 2 nœuds.

* Liquide $\hat{=}$ cas général avec $\rho_{liq} \gg \rho_{gaz}$
 $X_{s, liq} \gg X_{s, gaz}$

$$c_{eau} = 1430 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

* Solide modélisé $\hat{=}$ un ensemble d'oscillateurs et les vibrations vont se propager de proche en proche.

$$c_{se} = \sqrt{\frac{E}{\rho}} = 4900 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \text{ pour fer.}$$

Expe géant : tube en métal, on tape dessus $\Rightarrow$ harmonique

mode propres $f_n = \frac{c}{2L} \cdot n$ on trace $f_n = f(\lambda) \Rightarrow \text{slopes} = \frac{c}{2L} \Rightarrow c$

3. Vérification des hypothèses $\rightarrow$ le temps de toutes les vérifier faire que adiabatique

* Hyp adiabatique : on compare la diffusion thermique et la variation de σ occp avec leur temps caractéristiques.

• $\frac{G_{th}}{G_{ad}} = \frac{L^2}{D_{th}}$ avec D_{th} diffusivité thermique ($= 2 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ pour air)

• $G_{acoust} = \frac{L}{c}$ avec $L \approx \lambda = \frac{c}{f}$ pour audible ($20 \text{ Hz} - 20 \text{ kHz}$)
— car $c = 340 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

$\Rightarrow \frac{G_{ad}}{G_{th}} = \frac{L/c}{L^2/D_{th}} = \frac{D_{th}}{Lc} \approx 4 \cdot 10^{-6} \ll 1 \Rightarrow \underline{G_{ad} \ll G_{th}} \Rightarrow \text{adiabatique}$

* Hyp réversible (pas visqueuse) $Re = \frac{\rho c \lambda}{\eta}$ $c = \frac{\lambda}{T}$
 École classique $\rho \frac{U}{\lambda} = \frac{P_a}{\lambda} \xrightarrow{\lambda} U = \frac{P_a}{\rho \lambda} = \frac{P_a}{\rho c}$
 Air: $\rho = 1.3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ $\left\{ \begin{array}{l} U \approx 2 \cdot 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \\ P_a \approx 1 \text{ Pa} \end{array} \right. \rightarrow \text{Vrai vitesse des particules } \neq c$
 $\eta \approx 2 \cdot 10^{-5} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1} \Rightarrow Re \approx \frac{1 \times 2 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 10^{-5}} \times \lambda \approx 2 \cdot 10^2 \times \frac{c}{f}$

$\Rightarrow$ Pour $f \approx 20 \text{ Hz} \Rightarrow \underline{Re \approx \frac{2 \cdot 10^2 \times 340}{20} \approx 3400 \gg 1} \Rightarrow \text{hyp ok}$

Mais pour $f \approx 20 \text{ kHz}$ $Re \approx 3 \Rightarrow$ limite

Adiabatique + réversible $\rightarrow$ isentropique ok

* Hyp acoustique * $U \approx 2 \cdot 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ $c \approx 340 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \Rightarrow \underline{U \ll c} \Rightarrow \text{ok}$

1. OPH: Caractère longitudinal et impédance acoustique.

OPH solution de eq de d'Alembert

OPH selon direct° de $\vec{r}$ en $\mathbb{R}$ $\vec{U} = \vec{U}_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}$ $\vec{p} = \vec{p}_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}$ $\vec{U}_0 = \vec{U}_0 e^{i\ell}$
 $\vec{U} = \text{Re}(\vec{U})$ et $p = \text{Re}(p)$ $p_a = p_a e^{i\ell}$
 avec $\vec{k} = k \vec{n} \rightarrow$ direction de propagation

On injecte dans eq de d'Alembert $\Rightarrow$ Relation de dispersion

En choisissant $k \in \mathbb{R} \Rightarrow$ atténuation.

$$\boxed{k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}}$$

De (4) $v_g = \frac{\omega}{\text{Re}(k)} = c \Rightarrow$ indep de $\omega \Rightarrow$ milieu non dispersif

* (2) $\Rightarrow \rho_0 \omega \vec{v} = -(\text{ik}) p_a \Rightarrow \boxed{\vec{v} = \frac{k p_a}{\rho_0 \omega} \vec{n} = \frac{p_a}{c \rho_0} \vec{n}}$

$\Rightarrow \vec{v}$ colinéaire à $\vec{n} \Rightarrow$ onde longitudinale.

* On définit impédance acoustique $Z_a = \frac{p_a}{\|\vec{v}\|} = \rho_0 c$ [$\text{kg} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{s}^{-1}$]

ODG: $Z_{\text{air}} \approx 410 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{s}^{-1}$

$Z_{\text{eau}} = 1,6 \cdot 10^6 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{s}^{-1}$

$\left. \begin{array}{l} \rho_{\text{air}} \gg \rho_{\text{eau}} \\ c_{\text{air}} \gg c_{\text{eau}} \end{array} \right\} Z_{\text{eau}} \gg Z_{\text{air}}$

III - Aspects énergétiques

1. Énergie acoustique et transport

Par analogie aux autres phénomènes de transport déjà étudiés on définit
→ É acoustique dans vol élémentaire $dE = e(H, t) d\Omega_m$

→ Puissance sonore à travers S orientée

$P_{\text{son}} = \frac{dE_{\text{son}}}{dt} = \int_S \vec{\Pi} \cdot d\vec{s}$

Avec : $e(H, t)$ = densité volumique d'énergie

$S(t)$ = E traversant S pdt dt

$\vec{\Pi}$ = vecteur densité de courant d'E sonore = vecteur Poynting acoustique.

On peut montrer (cf Denod PC/PC*) l'eq de conservation (analogie EM) de l'énergie sonore locale

$\boxed{\frac{\partial e}{\partial t} + \text{div} \vec{\Pi} = 0}$

Or onde acoustique $\rightarrow$ mise en mouvement particules $\Rightarrow e_c$

$\rightarrow$ compression/dilatation particule $\Rightarrow u$ (E interne)

$$\Rightarrow \boxed{\begin{cases} p = p_0 + \rho v \\ \vec{\Pi} = p_0 \vec{v} \end{cases}} \quad \text{avec} \quad \boxed{p_0 = \rho \frac{v^2}{2}} \quad \text{et} \quad \boxed{v = \chi_0 \frac{p_0^2}{2}}$$

démo en dév : $\text{div}(p_0 \vec{v}) = p_0 \text{div} \vec{v} + (\text{grad } p_0) \cdot \vec{v}$ d'en déduisant eq 2 et 4
 et on identifie les termes

* Pour 1 OPH avec $Z_A = \frac{p_A}{v} = c \rho_0 \Rightarrow p_0 = \chi_0 \frac{p_A^2}{2} \Rightarrow \underline{p = 2v}$

On montre aussi $\langle \vec{\Pi} \rangle = \langle p \rangle c \vec{n}$ $\Rightarrow$ transport d'énergie dans la direct° de $\vec{n}$ à la vitesse c .

(Indép de $x = \rho$ absqpt)

2 - Intensité sonore

Oreille sensible aux variations de pression $\Rightarrow$ on doit pouvoir définir une échelle d'un son avec volume à partir de la pression acoustique

On définit l'intensité sonore $I = \langle \|\vec{\Pi}\| \rangle$ [$\text{W} \cdot \text{m}^{-2}$]

$\hookrightarrow$ puissance moyenne par unité de surface ($dP_{\text{moy}} = \langle \vec{\Pi} \rangle \cdot d\vec{S}$)
 $=$ flux de $\vec{\Pi}$ à travers S orientée $\hookrightarrow I = \frac{dP_{\text{moy}}}{dS}$

L'intensité des sons varie énormément : $10^{-12} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \leq I_{\text{audible}} \leq 1 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$
 $\hookrightarrow$ double

De @ oreille = récepteur logarithmique

$V = I_{\text{dB}} \Rightarrow \boxed{I_{\text{dB}} = 10 \log\left(\frac{I}{I_0}\right)}$ avec $I_0 = 10^{-12} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$ seuil d'audibilité
 $\hookrightarrow$ Niveau sonore

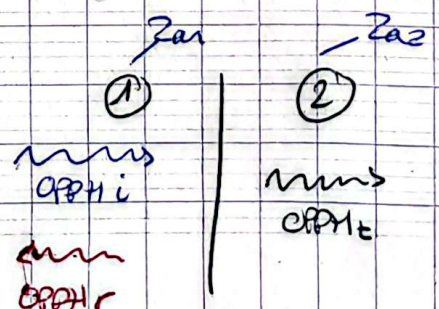
$\hookrightarrow$ 1 OPH $\Pi = p_0 v = Z_A v^2 = \frac{p_A^2}{Z_A}$ à l'interface avec Z_{air}

* Slide avec I, p_m et $v_m \Rightarrow$ valident approximation acoustique $p \ll p_0$ et $v \ll v_0$

$\hookrightarrow$ Pas le temps

3 - Réflexion et réfraction d'un OPH sonore

Continuité de p et v à l'interface



On peut montrer : - Coeff. réflexion / transmission en amplitude $r = \frac{Z_{a1} - Z_{a2}}{Z_{a1} + Z_{a2}}$ $t = \frac{2Z_{a1}}{Z_{a1} + Z_{a2}}$

- Coeff. réflexion / transmission en puissance $R = \frac{P_r}{P_i} = |r|^2 = \left(\frac{Z_{a1} - Z_{a2}}{Z_{a1} + Z_{a2}} \right)^2$ $T = \frac{P_t}{P_i} = |t|^2 = \frac{4Z_{a1}Z_{a2}}{(Z_{a1} + Z_{a2})^2}$

$R + T = 1$ $\Rightarrow P_r + P_t = P_i \Rightarrow$ conservation $\mathcal{E}$

$\Rightarrow$ Pour avoir une transmission $\mathcal{E}$ importante entre 2 milieux il faut $Z_{a1} \approx Z_{a2}$
 $\Rightarrow$ adapter l'impédance (gel pour échographie)

CDG : $Z_{air} = 410 \text{ SI}$ $\Rightarrow$ air $\rightarrow$ eau $\Rightarrow R \approx 1 \Rightarrow$ réflexion quasi totale.
 $Z_{eau} = 1,6 \cdot 10^6 \text{ SI}$

CONCLUSION

$\rightarrow$ On a établi eq de d'Alembert pour ondes acoustiques avec certaines hyp qu'on a vu faire

$\rightarrow$ Etude des réflexions avec ondes au eq d'impédance

$\rightarrow$ Etude énergétique faite grâce à analogie